

Corso di Laurea in Matematica
Probabilità I
Anno Accademico 2012-2013
10 Luglio 2013

L'uso di documenti e gadget elettronici di ogni tipo non è autorizzato. Motivare chiaramente i procedimenti o i risultati proposti. Avete due ore. Non è necessario esplicitare tutti i calcoli numerici salvo se diversamente indicato. Il testo continua sul dorso del foglio.

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p , allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p , allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ , allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1. Un'urna contiene 40 palline numerate da 1 a 40. Le palline con numero da 1 a 10 sono colorate di rosso, con numero da 11 a 20 sono colorate di verde, con numero da 21 a 30 di giallo e con numero da 31 a 40 di blu. Si estraggono 6 palline senza rimpiazzo una dopo l'altra.

- (a) Calcolare esplicitamente (come numero frazionario) la probabilità che le palline estratte abbiano numerazione crescente (ovvero: la seconda pallina abbia un numero maggiore della prima, la terza pallina un numero maggiore della seconda,..., la sesta un numero maggiore della quinta).
- (b) Determinare (non serve completare i calcoli) la probabilità che le palline estratte abbiano numerazione crescente sapendo che la quarta pallina estratta ha il numero 7.
- (c) Sia X il numero di palline tra le prime 5 estratte tali che la pallina successivamente estratta riporti un numero maggiore. Calcolare esplicitamente (come numero frazionario) il valore atteso di X .
- (d) Determinare (non serve completare i calcoli) la probabilità che vi siano almeno tre palline dello stesso colore.

Si immagini ora, invece di estrarre 6 palline, di procedere nel seguente modo: si lancia una moneta onesta. Se esce testa si estraggono 4 palline, se esce croce si estraggono 2 palline (sempre dall'urna di 40 palline, 10 per colore).

- (e) Calcolare esplicitamente (come numero frazionario) media e momento secondo del numero di palline gialle estratte.

ESERCIZIO 2. Alberto e Beatrice si sfidano nel seguente gioco. In un'urna ci sono una palla bianca ed una nera. Alberto estrae per primo una palla a caso

dall'urna. Se è la palla bianca, Alberto vince. Altrimenti, se estrae la palla nera, la reinserisce nell'urna insieme ad una palla bianca e la mano passa allora a Beatrice, seguendo la stessa regola (anche se ora vi saranno due palle bianche ed una nera nell'urna): se Beatrice estrae una palla bianca, vince. Altrimenti reinserisce la palla nera nell'urna insieme ad una palla bianca, e la mano torna di nuovo ad Alberto. E così via. Diremo che il gioco è terminato all' n -esimo turno se se Alberto oppure Beatrice ha estratto una palla bianca alla sua n -esima estrazione.

- (a) Determinare (non serve completare i calcoli) la probabilità che Alberto vinca il gioco. Se non si è in grado di esplicitare il valore richiesto, si definisca p tale probabilità per svolgere i punti successivi.
- (b) Determinare (non serve completare i calcoli) la probabilità che il gioco termini esattamente al decimo turno, sapendo che Alberto ha vinto.
- (c) Ripetendo il gioco 10.000 volte ed effettuando un'opportuna approssimazione, dare una stima dall'alto (con un opportuno integrale di cui non si richiede il calcolo) della probabilità che il gioco termini al primo turno per almeno 9.000 volte.

Soluzioni

ESERCIZIO 1.

- (a) Chiamiamo S lo spazio campionario

$$S = \{(x_1, \dots, x_6) : x_1, \dots, x_6 \in \{1, \dots, 40\} \text{ distinti} \}.$$

Esso ha esiti equiprobabili per simmetria e $|S| = 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35$. Le 6-uple ordinate in ordine crescente di numeri da 1 a 40 sono in bigezione con gli insiemi non ordinati di 6 numeri distinti da 1 a 40 (dato un tale insieme lo si ordina automaticamente in modo univoco usando l'ordine crescente, si noti che questo fatto è stato osservato a lezione in più occasioni!). quindi la soluzione è

$$\frac{\binom{40}{6}}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$$

(b) Dato che S ha esiti equiprobabili, $P(E|F) = |E \cap F|/|F|$, dove E è l'insieme delle 6-uple in S con numerazione crescente e F è l'insieme delle 6-uple in S per cui la quarta entrata è 7. $|F| = 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35$ (applicare principio fondamentale calcolo combinatorio per contare le possibili entrate diverse dalla quarta). Una 6-upla di S che sta in $E \cap F$ è univocamente determinata se si specificano senza ordine i tre numeri minori di sette che appaiono nelle prime tre entrate (ho $\binom{6}{3}$ modi) e se si specificano senza ordine i due numeri maggiori di sette che appaiono nelle ultime 2 entrate (ho $\binom{33}{2}$ modi). Quindi la soluzione è

$$\frac{\binom{6}{3} \binom{33}{2}}{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35}$$

(c) Per $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sia X_i la v.a. che vale 1 se la pallina i -esima ha numero minore della pallina $i + 1$ esima, altrimenti vale 0. $X = X_1 + X_2 + \dots + X_5$ e quindi $EX = \sum_{i=1}^5 E(X_i)$.

$$P(X_1 = 1) = \frac{\binom{40}{2}}{40 \cdot 39} = 1/2$$

Che fosse $1/2$ si poteva dedurre semplicemente per simmetria. In realtà $E(X_i)$ è lo stesso per tutti gli i . Per dimostrarlo procediamo come segue. Fissato i si consideri la mappa $\sigma_i : S \rightarrow S$ dove $\sigma_i(x_1, \dots, x_6)$ è ottenuto scambiando x_1 con x_i e x_2 con x_{i+1} . Esempio: $\sigma_4(x_1, \dots, x_6) = (x_4, x_5, x_3, x_1, x_2, x_6)$. Banalmente σ_i è una bigezione. Sia E_i l'evento $\{X_i = 1\}$. Si noti che $\sigma_i(E_1) = E_i$. Quindi $|E_i| = |\sigma_i(E_1)| = |E_1|$. Quindi

$$P(E_i) = \frac{|E_i|}{|S|} = \frac{|E_1|}{|S|} = P(E_1).$$

Concludiamo che

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 P(E_i) = 5/2$$

(d) Siano E_1, E_2, E_3, E_4 gli eventi che vi siano almeno tre palline rosse, verdi, gialle, blu rispettivamente. Per il principio di inclusione-esclusione

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} P(E_i \cap E_j)$$

dato che tutte le altre intersezioni sono vuote. Per ogni i ,

$$P(E_i) = \sum_{k=3}^6 \frac{\binom{10}{k} \binom{30}{6-k}}{\binom{40}{6}}$$

Per ogni $i \neq j$, si ha

$$P(E_i \cap E_j) = \frac{\binom{10}{3} \binom{10}{3}}{\binom{40}{6}}$$

La soluzione è quindi

$$4 \sum_{k=3}^6 \frac{\binom{10}{k} \binom{30}{6-k}}{\binom{40}{6}} - \binom{4}{2} \frac{\binom{10}{3} \binom{10}{3}}{\binom{40}{6}}$$

(e) Sia Y il numero di palline gialle estratte. Sia E l'evento esce testa e F l'evento esce croce. Rispetto a $Q := P(\cdot|E)$ la v.a. Y è ipergeometrica con $n = 4, N = 40, m = 10$. Quindi $E_Q(Y) = nm/N = 1$, $E_Q(Y^2) = \text{Var}_Q(Y) + E_Q(Y)^2 = (36/39)4(1/4)(3/4) + 1 = 9/13 + 1 = 22/13$. Analogamente, detto $Q' = P(\cdot|F)$ si ha che rispetto a Q' la v.a. Y è ipergeometrica di parametri $N = 40, n = 2, m = 10$. Quindi $E_{Q'}(Y) = nm/N = 1/2$, $E_{Q'}(Y^2) = \text{Var}_{Q'}(Y) + E_{Q'}(Y)^2 = (38/39)2(1/4)(3/4) + 1/4 = 19/(13 \cdot 4) + 1/4 = 32/52 = 8/13$. Dalla legge delle prob. totali si deduce che

$$E(Y) = \frac{1}{2}E_Q(Y) + \frac{1}{2}E_{Q'}(Y) = 1/2 + (1/2)(1/2) = 3/4$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{2}E_Q(Y^2) + \frac{1}{2}E_{Q'}(Y^2) = (1/2)(22/13) + (1/2)(8/13) = 15/13$$

ESERCIZIO 2.

(a) Sia E_n l'evento che Alberto vinca il gioco all' n -esimo turno e E l'evento

che Alberto vinca il gioco. Allora $E = \cup_{n \geq 1} E_n$ e gli eventi E_n sono disgiunti. Quindi $P(E) = \sum_{n \geq 1} P(E_n)$. Si noti che

$$E_n = A_1 \cap B_1 \cap A_2 \cap B_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap B_{n-1} \cap A_n^c$$

dove $A_i :=$ Alberto estrae pallina bianca alla sua estrazione i -esima, e $B_i :=$ Beatrice estrae pallina bianca alla sua estrazione i -esima. Per la legge del prodotto

$$\begin{aligned} P(E_n) &= P(A_1)P(B_1|A_1)P(A_2|A_1 \cap B_1)P(B_2|A_1 \cap B_1 \cap A_2) \cdots \\ &\quad P(A_{n-1}|A_1 \cap B_1 \cap A_2 \cap B_2 \cap \cdots \cap A_{n-2} \cap B_{n-2}) \cdot \\ &\quad P(B_{n-1}|A_1 \cap B_1 \cap A_2 \cap B_2 \cap \cdots \cap A_{n-2} \cap B_{n-2} \cap A_{n-1}) \cdot \\ &\quad P(A_n^c|A_1 \cap B_1 \cap A_2 \cap B_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap B_{n-1}) \end{aligned}$$

e quindi

$$P(E_n) = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{5} \cdots \frac{1}{2n-2} \frac{1}{2n-1} \frac{2n-1}{2n} = \frac{2n-1}{(2n)!}.$$

Si noti prima dell'ennesimo turno in cui Alberto vince si sono fatte $2(n-1)$ estrazioni senza vittoria e quindi vi sono $2n-1 = 1 + 2(n-1)$ palline bianche e 1 pallina nera. Ne deriva che

$$p := P(E) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(2n)!}.$$

(b) Abbiamo $P(E_{10}|E) = P(E_{10} \cap E)/P(E) = P(E_{10})/P(E) = \frac{19}{(20)!}p^{-1}$.

(c) Il gioco termina al primo turno se Alberto pesca pallina bianca alla prima estrazione oppure Alberto pesca pallina bianca alla prima estrazione e poi Beatrice pesca pallina nera.

$$\alpha = P(\text{gioco termina primo turno}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

Sia Z il numero di volte in cui il gioco termina al primo turno su 9000 partite. Z è binomiale $\text{Bin}(10.000, 5/6)$, quindi $E(Z) = 10.000(5/6) = 25.000/3 \sim 8333$. Per il Teorema di De Moivre Laplace (si noti che $\text{Var}(Z)$ supera di gran lunga la soglia 10, vedi ross), abbiamo

$$P(Z \geq 9.000) = P\left(\frac{Z - 25.000/3}{\sqrt{10.000(5/36)}} \geq \frac{9000 - 25.000/3}{\sqrt{10.000(5/36)}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

dove

$$a := \frac{9000 - 25.000/3}{\sqrt{10.000(5/36)}} = \frac{9000 - 25.000/3}{100\sqrt{5}/6} = 40/\sqrt{5}$$

In particular, essendo $a \geq 40/2 = 20$ abbiamo che

$$P(Z \geq 9000) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_2^{\infty} 0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

che è' piccolissimo.