

PROCESSI STOCASTICI 1. ESAME SCRITTO. 15/04/2010

Tempo a disposizione: 2 ore

Nota: Non è consentito l'uso di calcolatrici, né di materiale didattico.

ESERCIZIO 1. Due giocatori A e B hanno inizialmente 1 euro e 3 euro rispettivamente. Giocano il seguente gioco: ogni volta lanciano un dado onesto. Se esce 1 allora A si prende tutti i soldi di B , se esce 2 o 3 allora A vince un euro e B ne perde uno, se esce 4 o 5 allora A perde un euro e B ne vince 1, se esce 6 B si prende tutti i soldi di A . Il gioco termina quando uno dei due giocatori si ritrova senza soldi.

- 1) Modellizzare il suddetto gioco con una catena di Markov a tempi discreti, scrivendone distribuzione iniziale e matrice di transizione.
- 2) Dare una rappresentazione grafica della matrice di transizione.
- 3) Provare che il gioco si ferma con probabilità 1.
- 4) Chiamato T il tempo in cui A si ritrova con 3 euro e B con un euro, condizionato al fatto che T sia finito determinare la probabilità che al tempo $T + 2$ A abbia 1 euro e B abbia 3 euro.

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice stocastica sullo spazio degli stati $I = \{1, 2, \dots, 7\}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \end{pmatrix}$$

- 1) Dare una rappresentazione grafica della matrice di transizione.
- 2) Determinare classi comunicanti, classi comunicanti chiuse.
- 3) Determinare stati ricorrenti, transienti, assorbenti.
- 4) Determinare le distribuzioni invarianti rispetto a P e le misure invarianti rispetto a P .

Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con matrice di transizione P tale che $X_0 = 1$.

- 5) Determinare $P(X_2 = 2, X_3 = 3, X_5 = 1)$.
- 6) Dire se esistono i seguenti limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i)$$

al variare di $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n)$, giustificando la risposta. In caso affermativo calcolarli esplicitamente.

- 7) Risolvere lo stesso quesito del punto precedente assumendo ora che $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 4) = 1/2$.

ESERCIZIO 3. Si consideri la passeggiata aleatoria su $\mathbb{Z}$ tra siti primi vicini con le seguenti probabilità di transizione:

$$p_{x,y} = \begin{cases} 1/2 & \text{se } x \text{ è pari e } |x - y| = 1, \\ 2/3 & \text{se } x \text{ è dispari e } y = x + 1, \\ 1/3 & \text{se } x \text{ è dispari e } y = x - 1. \end{cases}$$

Determinare stati transienti e stati ricorrenti.