PROCESSI STOCASTICI 1. ESAME SCRITTO. 07/09//2010. TRACCE

ESERCIZIO 1.

Lo stato del sistema può essere codificato dal numero k di palline nere nell'urna A, con $k \in I := \{0,1,2\}$. Infatti, noto k, abbiamo che A contiene k palline nere e $2-k$ palline bianche, e che B contiene $2-k$ palline nere e k palline bianche.

1) Se $X_n = 0$ allora A ha 2 bianche (sottinteso:palline) e B ha due nere. Necessariamente $X_n = 1$.

Se $X_n = 2$ allora A ha 2 Nere e B ha due bianche. Necessariamente $X_{n+1} = 1$.

Se $X_n = 1$ allora A e B contengono una nera e una bianca. Chiamati (x,y) i colori delle palline estratte da A e da B, rispettivamente, con uguale probabilità 1/4 si ha $(x,y) = (N,N)$ e quindi $X_{n+1} = X_n = 1$, $(x,y) = (N,B)$ e quindi $X_{n+1} = 0$, $(x,y) = (B,N)$ e quindi $X_{n+1} = 2$, $(x,y) = (B,B)$ e quindi $X_{n+1} = X_n = 1$. In conclusione

$$P(X_{n+1} = i | X_n = 1) = \begin{cases} 1/4 & \text{se } i = 0\,, \\ 1/2 & \text{se } i = 1\,, \\ 1/4 & \text{se } i = 2\,. \end{cases}$$

Quindi $\{X_n\}_{n\geq 0}$ è catena di Markov con spazio degli stati $\{0,1,2\}$, distribuzione iniziale $\lambda_0 = (0,1,0)$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) P è irriducibile con spazio degli stati finito. Quindi ha un'unica distribuzione invariante λ. Risolvendo il sistema $\lambda P = \lambda$ e cercando l'unica soluzione normalizzata si ha: $\lambda = (1/6, 2/3, 1/6)$.

Le distribuzioni reversibili sono anche invarianti. Quindi abbiamo solo due casi possibili: λ è anche reversibile e quindi è l'unica distribuzione reversibile, oppure λ non è reversibile e quindi non esistono distribuzioni reversibili. Notiamo che l'equazione del bilancio dettagliato è verificata se e solo se $\lambda_i p_{i,j} = \lambda_j p_{j,i}$ con $(i,j) = (1,2), (1,3), (2,3)$. Le tre identità diventano rispettivamente $(1/6)1 = (2/3)(1/4)$, $(1/6)0 = (1/6)0$, $(2/3)(1/4) = (1/6)1$. Tali identità sono vere quindi λ è l'unica distribuzione reversibile.

3) P è irriducibile e aperiodica (uso che $P_{1,1} > 0$). Quindi vale teorema convergenza all'equilibrio quindi $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2) = \lambda_2 = 1/6$.

ESERCIZIO 2

2) classi comunicanti $\{1,2,3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6,7\}$. Sono tutte chiuse tranne $\{6,7\}$.

3) Stati ricorrenti $1,2,3,4,5$, stati transienti $6,7$, stati assorbenti $4,5$.

4) Risolvo

$$(a,b,c) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = (a,b,c)$$

cercando l'unica soluzione che e' anche distribuzione. Ottengo $(a,b,c) = (\frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10})$. Ne deriva che le distribuzioni invarianti λ sono tutte e sole della forma

$$\lambda = (3\alpha/10, 3\alpha/10, 4\alpha/10, \beta, \gamma, 0, 0)$$

con $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ e $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

5) $\mathbb{P}_7(X_1 = 1, X_3 = 3) = P_{7,1}(P_{1,1}P_{1,3} + P_{1,2}P_{2,3} + P_{1,3}P_{3,3}) = (1/3)\big[(1/3)(1/3) +$

$(1/3)(1/3) + (1/3)(1/2)\big] = 7/54$.
6) Chiamo $h_i = \mathbb{P}_i(T < \infty)$. Abbiamo $h_7 = (1/3)h_1 + (1/3)h_6 + (1/3)h_7$, $h_5 = 0$, $h_1 = 1$, $h_6 = (1/3)h_5 + (1/3)h_6 + (1/3)h_7$. Quindi $h_6 = 1/3$, $h_7 = 2/3$. La soluzione quindi è 2/3.

ESERCIZIO 3
1) Tutti gli stati sono transienti. Infatti, spostandomi sempre in alto o a destra, non posso mai visitare due volte lo stesso stato. A maggior ragione, con probabilità 0 partendo in i visito i infinite volte.
2) $X_{10} = (x, y)$ se e solo se entro il tempo 10 ho fatto esattamente x passi a destra e y passi in alto. Quindi, dato $(x, y) \in I$, ho

$$\mathbb{P}(X_{10} = (x, y)) = \begin{cases} \binom{10}{x}(1/2)^{10} & \text{se } x + y = 10\,, \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

3) Possiamo realizzare X_n come $X_n = Z_1 + \dots Z_n$ dove $Z_1, Z_2, \dots$ è una successione di vettori aleatori i.i.d. con legge

$$\mathbb{P}(Z_i = (1, 0)) = 1/2\,, \qquad \mathbb{P}(Z_i = (0, 1)) = 1/2\,.$$

Per la legge forte dei grandi numeri abbiamo che il limite esiste quasi certamente e vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = (1(1/2) + 0(1/2), 1(1/2) + 0(1/2)) = (1/2, 1/2)\,.$$