PROCESSI STOCASTICI 1. ESAME SCRITTO. 12/07/2010

Tempo a disposizione: 2 ore

Nota: Non è consentito l'uso di calcolatrici, né di materiale didattico.

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice stocastica sullo spazio degli stati $I = \{1, 2, \dots, 6, 7, 8\}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1) Dare una rappresentazione grafica della matrice P.
2) Determinare classi comunicanti, classi comunicanti chiuse.
3) Determinare stati ricorrenti, transienti, assorbenti.
4) Determinare le distribuzioni invarianti rispetto a P.
Indicare con $\mathbb{P}_i$ la misura di probabilità rispetto alla catena di Markov a tempi discrete $(X_n : n \geq 0)$ per cui $X_0 = i$.
5) Dire se esiste il limite $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_3(X_n \in \{3, 4\})$ motivando la risposta. In caso affermativo, calcolare il limite.
6) Dire se esiste il limite $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_2(X_n = 1)$ motivando la risposta. In caso affermativo, calcolare il limite.
7) Dire se esiste il limite $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_2(X_n = 8)$ motivando la risposta. In caso affermativo, calcolare il limite.
8) Definito $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 6\}$ (con la convezione che $\inf \emptyset = \infty$) determinare $\mathbb{P}_8(X_{T+2} = 3, X_{T+3} = 4 | T < \infty)$.
9) Provare che $\mathbb{P}_8(T < \infty) = 1$.
10) Definito $\bar{T} = \sup\{n \geq 0 : X_n = 8\}$ (con la convenzione che $\sup \emptyset = -\infty$), determinare $\mathbb{P}_7(X_{\bar{T}+1} = 6 | \bar{T} \in \mathbb{N})$, dove $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
11) Provare che $\mathbb{P}_7(\bar{T} \in \mathbb{N}) = 1$.

ESERCIZIO 2. Vi sono due giocatori A e B. Inizia il gioco A. Lancia un dado. Se esce 6 A vince, se esce un numero dispari A passa il gioco a B, se esce un numero pari diverso da 6 allora A lancia il dado di nuovo e il precedente schema si ripete. Quando il gioco passa a B, B lancia il dado e valgono le stesse regole: Se esce 6 B vince, se esce un numero dispari B passa il gioco ad A, se esce un numero pari diverso da 6 allora B lancia il dado di nuovo e il precendente schema si ripete.
1) Modellizzare il gioco tramite una catena di Markov a tempo discreto (indicare spazio degli stati e matrice di transizione).
2) Determinare la probabilità che A vinca.
3) Determinare la probabilità che il gioco non si concluda prima di tre lanci del dado (cioè, che vi siano almeno tre lanci del dado).