ESAME SCRITTO PS1 – 13/07/09
Tempo a disposizione: 2 ore

ESERCIZIO 1
Si consideri la seguente catena di Markov a tempo discreto $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$ per studiare la diffusione di una malattia in una coppia di individui A e B:
(i) al tempo $n = 0$ A e B sono entrambi sani,
(ii) dato il loro stato al tempo n, lo stato al tempo $n + 1$ viene determinato con le seguenti regole:

(1) si sceglie con uguale probabilità un individuo tra A e B;
(2) lo stato di salute dell'individuo diverso da quello scelto resta invariato dal tempo n al tempo $n + 1$;
(3) se l'individuo scelto è malato al tempo n, allora al tempo $n+1$ resta malato con probabilità 1/2 o guarisce con probabilità 1/2.
(4) se l'individuo scelto è sano al tempo n, allora al tempo $n + 1$ è malato con probabilità 1/2 se l'altro individuo è sano e con probabilità 1 se l'altro individuo è malato, altrimenti resta sano.

1) Formalizzare la suddetta descrizione della catena di Markov esibendone spazio degli stati, matrice di transizione e distribuzione iniziale.
2) Calcolare la probabilità che al tempo $n = 2$ entrambi gli individui siano malati.
3) Determinare il limite per $n \to \infty$ della probabilità che al tempo n A sia malato e B sia sano.
4) Determinare il limite per $n \to \infty$ della probabilità che al tempo n A sia malato.
5) Chiamato Z_n il numero di individui malati al tempo n, determinare il limite del valore medio $\mathbb{E}(Z_n)$ per $n \to \infty$.

ESERCIZIO 2
Si consideri la matrice di tranzione P sullo spazio degli stati $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definita come

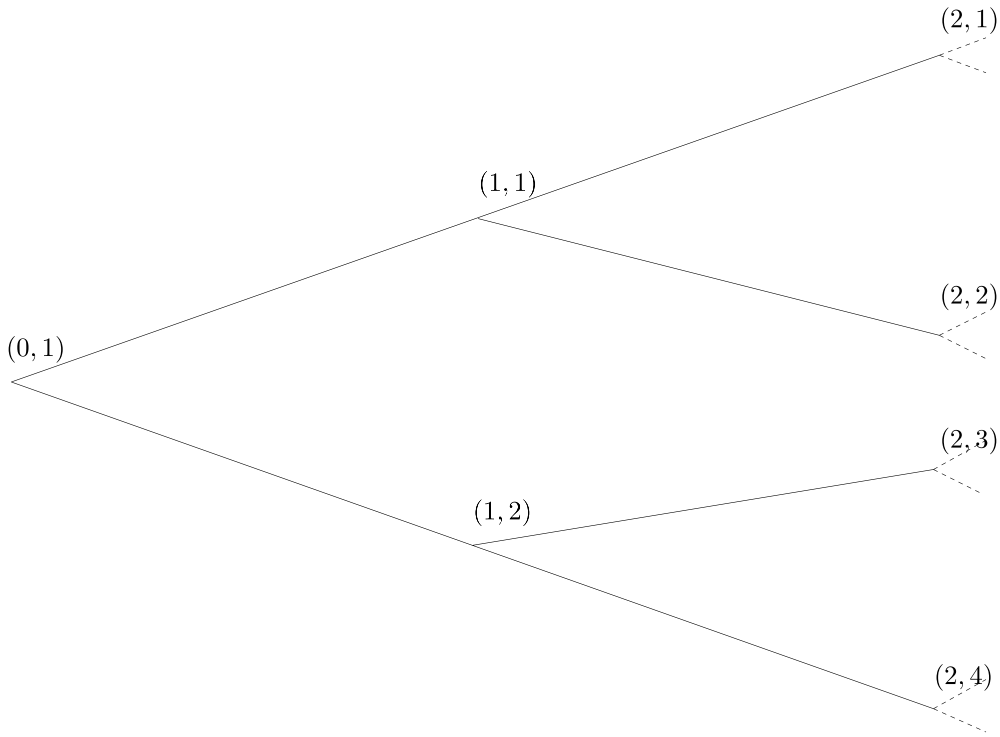
$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Dare una rappresentazione grafica della suddetta matrice di transizione.
2) Determinare le classi comunicanti e le classi comunicanti chiuse.
3) Determinare stati assorbenti, transienti, ricorrenti.
4) Determinare distribuzioni e misure invarianti.
5) Definitio $T = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = 3\}$ determinare $P_1(X_{T+1} = X_{T+2} | T < \infty)$, dove P_1 è la legge della catena di Markov con matrice di tranzisione P e stato iniziale 1.
6) Calcolare $P_1(T < \infty)$.

ESERCIZIO 3
Considerare il grafo ad albero come in figura (vedi retro)
I vertici del grafo sono indicizzati dalla coppia (m, j), con $m \geqslant 0$ e $1 \leqslant j \leqslant 2^m$.
Considerare la passeggiata aleatoria semplice sul grafo $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$ (da ogni vertice si salta in un vertice adiacente con uguale probabilità). Chiamare

$$h(m, j) = P_{(m,j)}(X_n = (0, 1) \text{ per qualche } n \geqslant 0)\,,$$

dove $P_{(m,j)}$ indica la legge della passeggiata aleatoria con stato iniziale (m, j).
1) Calcolare $h(m, j)$ per ogni vertice (m, j) (suggerimento: osservare che $h(m, j)$ non dipende da j per motivi di simmetria).
2) Determinare stati transienti e stati ricorrenti.


(2, 1)
(1, 1)
(2, 2)
(0, 1)
(2, 3)
(1, 2)
(2, 4)