

## ESERCIZI DI STATISTICA MATEMATICA. a.a. 2017/2018

**Nota:** gli esercizi del libro "Probabilità e statistica per l'ingegneria e le scienze" di S.M. Ross (casa ed. Apogeo) si riferiscono alla terza edizione italiana. Le altre edizioni vanno pure bene ma va controllata se la numerazione è la stessa.

- (1) Siano  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a. gaussiane  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  indipendenti, equivalentemente sia  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  un vettore gaussiano  $n$ -dimensionale di media zero e matrice di covarianza  $\sigma^2 \mathbb{I}$ . Dati  $\alpha \in (0, 1)$  determinare in termini del parametro  $\chi_{\alpha, n}^2$  il valore  $\lambda$  tale che  $P(|X| > \lambda) = \alpha$
- (2) Sia  $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ . Provare che  $cX \sim \Gamma(\alpha, \frac{\lambda}{c})$ .
- (3) Sia  $X$  v.a. continua con funzione di densità

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \beta \exp\{-\beta(x - \alpha)\} & \text{se } x \geq \alpha, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\beta > 0$ . Determinare valore atteso, momento primo e momento secondo di  $X$ .

- (4) Esercizi 6,8,9,13 cap. 2 del Ross
- (5) Esercizio 45 capitolo 5 del Ross.
- (6) Esercizio 9 capitolo 7 del Ross.
- (7) Esercizi 15,16,17,28,40 cap.7 del ross
- (8) Siano  $X_1, \dots, X_n$  variabili i.i.d.  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Determinare la distribuzione di  $\bar{X}_n$ .
- (9) Determinare con il metodo dei momenti gli stimatori dei parametri incogniti nelle seguenti distribuzioni: Poisson( $\lambda$ ), Uniform( $a, b$ ), Bernoulli( $p$ ), Gamma( $\alpha, \lambda$ ), Exp ( $\lambda$ ).
- (10) Siano  $X_1, \dots, X_n$  v.a. IID con  $\mathbb{E}(|X_i|^k) < +\infty$  dove  $k \geq 1$ . Chiamo  $\mu = E(X_i)$ . Considerare il momento  $k$ -esimo e il momento  $k$ -esimo campionario:

$$\mu_k := \mathbb{E}(X_i^k), \quad M_k^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k.$$

Analogamente considerare il momento  $k$ -esimo centrato e il momento  $k$ -esimo centrato campionario:

$$\mu_k^c := \mathbb{E}((X_i - \mu)^k), \quad M_k^{c,(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^k.$$

- Dimostrare che  $M_k^{(n)}$  è uno stimatore consistente in probabilità di  $\mu_k$ , i.e.  $M_k^{(n)} \rightarrow \mu_k$  in probabilità.
- Dimostrare che  $M_k^{c,(n)}$  è uno stimatore consistente in probabilità di  $\mu_k^c$ , i.e.  $M_k^{c,(n)} \rightarrow \mu_k^c$  in probabilità.

*Hint: nel secondo punto, usare il teorema del binomio per sviluppare  $M_k^{c,(n)}$ .*

- (11) Supponiamo che il campione  $X_1, \dots, X_n$  sia tale che  $E(X_i^2) < \infty$ . Dimostrare che  $n(\bar{X}_n - \mu)^2$  al variare di  $n$  è una successione di variabili aleatorie limitate in probabilità.
- (12) Sia  $Y_n$  una successione di v.a. limitate in probabilità e sia  $Z_n$  una successione di v.a. convergente a zero in probabilità. Dimostrare che  $Y_n Z_n$  converge a zero in probabilità.
- (13) Siano  $X_1, X_2, \dots$  variabili i.i.d. di media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ . Trovare una legge limite di  $e^{\bar{X}_n}$  usando il metodo delta.
- (14) Sia  $Y_i = X_i^2$  dove  $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Derivare dal CLT le fluttuazioni gaussiane di  $\bar{Y}_n$ , trovare una trasformazione  $f$  per cui  $f(\bar{Y}_n)$  abbia fluttuazioni gaussiane di media zero e

varianza 1 (cioè trovare una trasformazione che stabilizzi la varianza), e ricavare intervalli di confidenza di  $\sigma^2$  di dato livello.

- (15) Per stimare  $p^2$  possiamo scegliere tra

- (a)  $n$  prove di tipo successo/insuccesso con probabilità di successo  $p^2$
- (b)  $n$  prove di tipo successo/insuccesso con probabilità di successo  $p$ .

Per stimare  $p^2$  nel primo caso usiamo  $X/n$  dove  $X$  è il numero dei successi in (a), e nel secondo caso  $(Y/n)^2$  dove  $Y$  è il numero dei successi in (b). Determinare, al variare del valore di  $p$ , quale metodo sia più accurato. *Hint: più accurato può essere inteso come "avente fluttuazioni minori"*

- (16) Esercizi 3,4 Cap VII, Ross

- (17) Determinare stimatore di massima verosimiglianza di  $\hat{a}, \hat{b}$  quando il campione aleatorio è dato da  $X_i \sim \text{Unif}(a, b)$

- (18) Determinare score function ed informazione di Fisher quando  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

- (19) Verificare che  $\bar{X}_n$  è stimatore corretto di minima varianza per il valore medio della distribuzione nei seguenti casi:  $X_i \sim \text{Bern}(p)$ ,  $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ,  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$  (attenzione che la media è qui  $1/\lambda$  e quindi bisogna lavorare con il parametro  $\theta = 1/\lambda$ )

- (20) Considerare la distribuzione di Pareto con parametri  $a = 1$  e  $\lambda > 2$  (densità  $\lambda x^{-\lambda-1}$  per  $x > 0$ ). Calcolare media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ . Verificare se  $\bar{X}_n$  è stimatore corretto di minima varianza per  $\mu$  (attenzione: bisogna calcolare  $I(\mu)$  e non  $I(\lambda)$ ).

- (21) Considerare  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  con  $\mu$  nota. Verificare che  $I(\theta) = \frac{1}{2\theta^2}$  con  $\theta = \sigma^2$ . Considerare gli stimatori corretti di  $\sigma^2$  dati dalla varianza campionaria e dallo stimatore di massima verosimiglianza (v. esercizio 3, cap.7 del Ross) e dire se sono stimatori corretti di minima varianza per  $\sigma^2$ . *Hint: usare la formula generale per la varianza della varianza campionaria a pag. 12 delle note*

- (22) Esercizi 64, 65, 66 del Cap.VII del Ross