ESERCIZIO 23. 1) $\mathcal{C} = \{1,3\}$ è classe comunicate chiusa. P ristretta a $\mathcal{C}$ è irriducibile e aperiodica con distribuzione invariante $(3/7, 4/7)$. Per il teorema di convergenza all'equilibrio il limite vale $3/7$.
2) Da 2 saltiamo in 2,3,4. Sia $H_4 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 4\}$. Abbiamo

$$\mathbb{P}_2(X_n = 5) = \mathbb{P}_2(X_n = 5, H_4 < +\infty) = \mathbb{P}_2(X_n = 5, H_4 < +\infty)$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_2(X_n = 5, H_4 = k) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_2(H_4 = k)\mathbb{P}_4(X_{n-k} = 5) \quad (1.6)$$

$\mathcal{C} = \{4,5\}$ è c.c. chiusa con distribuzione invariante $(2/5, 3/5)$. per teorema convergenza all'equilibrio, per ogni k fissato, $\mathbb{P}_4(X_{n-k} = 5) \to 3/5$. Provo che il limite di (1.6) è $\mathbb{P}_2(H_4 < +\infty)(3/5)$. Fissato $\varepsilon > 0$ scelgo $N = N(\varepsilon)$ tale che $\mathbb{P}_2(N < H_4 < +\infty) \leq \varepsilon$. Per $n > N$ abbiamo

$$\mathbb{P}_2(X_n = 5) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_2(H_4 = k)\mathbb{P}_4(X_{n-k} = 5) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}_2(H_4 = k)\mathbb{P}_4(X_{n-k} = 5) + \mathcal{E}_n$$

dove $0 \leq \mathcal{E}_n \leq \mathbb{P}_2(N < H_4 < +\infty) \leq \varepsilon$. Hence

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}_2(H_4 = k)(3/5) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_2(X_n = 5) \leq \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}_2(H_4 = k)(3/5) + \varepsilon$$

Mando ε a zero e ho $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_2(X_n = 5) = \mathbb{P}_2(H_4 < +\infty)(3/5)$.

2 è transiente. Quindi prima o poi, partendo in 2, con prob 1 entriamo in $\{3,4\}$. Per simmetria $\mathbb{P}_2(H_4 < +\infty) = 1/2$. La soluzione quindi è $3/10$