

Calcolo delle probabilità - Esonero parziale 29/11/05

TRACCIA DELLE SOLUZIONI

ESERCIZIO 1 Prendiamo come spazio campionario $S = \{ \{x_1, x_2, x_3\} : x_i \text{ distinti } x_i \in M \}$, dove M è il mazzo. S ha esiti equiprobabili.

$$1) P(E_1) = \frac{\binom{4}{3} 10^3}{\binom{40}{3}} = \frac{100}{13 \cdot 19} = \frac{100}{247}.$$

$$2) P(E_2) = \frac{4 \binom{10}{3}}{\binom{40}{3}} = \frac{12}{13 \cdot 19} = \frac{12}{247}.$$

$$3) P(E_3) = 1 - P(E_1) - P(E_2) = \frac{247-112}{247} = \frac{135}{247}.$$

4) Vincere 3 euro in 4 giocate significa che ho vinto 3 volte 1 euro e una volta non ho vinto nulla, oppure ho vinto una volta 2 euro, una volta 1 euro e 2 volte non ho vinto nulla. Quindi

$$P(E_4) = \binom{4}{3} \left(\frac{12}{247} \right)^3 \frac{135}{247} + 4 \cdot 3 \frac{12}{247} \frac{100}{247} \left(\frac{135}{247} \right)^2.$$

ESERCIZIO 2

1) Consideriamo gli eventi

$E_1 =$ " esce 1,2,3,4", $E_2 =$ " esce 5 o 6 ", $E =$ " estraggo 2 palline bianche".

$$P(E) = P(E|E_1)P(E_1) + P(E|E_2)P(E_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} \frac{2}{3} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} \frac{1}{3} = \frac{43}{252}.$$

2) Sia F l'evento $F =$ " estraggo 1 pallina rossa e 1 pallina gialla". Allora

$$P(E_2|F) = \frac{P(F|E_2)P(E_2)}{P(F|E_1)P(E_1) + P(F|E_2)P(E_2)} = \frac{\frac{3 \cdot 3}{\binom{9}{2}} \frac{1}{3}}{\frac{3 \cdot 3}{\binom{9}{2}} \frac{1}{3} + \frac{2 \cdot 2}{\binom{8}{2}} \frac{2}{3}} = \frac{7}{15}$$

3) Siano $G_1 =$ " esce 5", $G_2 =$ " esce 6". Per simmetria $P(G_1|F) = P(G_2|F)$. Essendo $P(\cdot|F)$ una funzione di probabilità, abbiamo

$$P(G_1|F) + P(G_2|F) = P(G_1 \cup G_2|F) = P(E_2|F) = 7/15.$$

Combinando i precedenti risultati otteniamo che $P(G_2|F) = 7/30$.

ESERCIZIO 3

$P(\text{volo}) = 1 - P(\text{non volo}) = 1 - P(\text{Air Berlin cancellato, Easy Jet cancellato, Alitalia cancellato}) = 1 - P(\text{Air Berlin cancellato}) P(\text{Easy Jet cancellato}) P(\text{Alitalia cancellato}) = 1 - \frac{2}{3} \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{1}{3} \right) = 1 - \frac{2}{3} \frac{2}{3} \frac{8}{9} = 1 - \frac{32}{81} = \frac{49}{81}.$

Lo stesso esercizio può essere risolto applicando il principio di inclusione-esclusione. A tal fine definiamo:

$E_1 =$ " posso volare con Air Berlin", $E_2 =$ " posso volare con Easy Jet", $E_3 =$ " posso volare con Alitalia". Allora

$$P(\text{volo}) = P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \frac{1}{27} + \frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{9} = \frac{49}{81}.$$