

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (14/07/08)

Tempo a disposizione: 1 ora e 40 minuti.

Non è consentito l'uso di calcolatrici. Fare i calcoli espliciti solo dove richiesto
FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p , allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1 - p)$.

Se X è v.a. geometrica di parametro p , allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1 - p)/p^2$.

Se X è v.a. di Poisson con parametro λ , allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.

Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N - m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1 - p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1

Tra gli esami di fine anno che Harry Potter deve sostenere alla Scuola di Magia e Stregoneria di Hogwarts vi è l'esame di Trasfigurazione, che consiste nel trasformare una pecora in un orso. Harry deve ripetere 5 prove, con 5 pecore diverse. Passa l'esame se riesce a trasformare almeno 3 pecore in orso.

La probabilità che Harry Potter riesca a trasformare una pecora in orso è pari a $2/3$ se la pecora è bianca e pari a $1/2$ se la pecora è nera. Le 5 pecore scelte sono nere o bianche con probabilità $1/2$, indipendentemente l'una dall'altra.

- 1) Determinare la probabilità che Harry Potter superi l'esame di Trasfigurazione.
- 2) Determinare la probabilità che Harry Potter riesca a trasformare esattamente 2 pecore in orso sapendo che le prime 3 pecore sono nere e le altre 2 sono bianche.
- 3) Determinare la probabilità che tutte le 5 pecore siano nere sapendo che Harry Potter ha superato l'esame di Trasfigurazione.
- 4) Chiamato X il numero di pecore che Harry Potter ha trasformato in orso nelle 5 prove, calcolare come numero frazionario $E(X)$ e $Var(X)$.

ESERCIZIO 2 Da un mazzo di 40 carte si estraggono 4 carte senza rimpiazzo. Determinare la probabilità dei seguenti eventi:

- 1) I valori delle carte estratte appartengono all'insieme $\{2, 3, 4, 5, 6\}$,
- 2) Vengono estratte solo carte di bastoni oppure carte con valori nell'insieme $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ (l'oppure non è esclusivo, non si tratta di un "o questo o quello").
- 3) le carte estratte non sono tutte di bastoni.

ESERCIZIO 3 Per questo esercizio le risposte devono essere date in forma di numeri frazionari a/b con a e b esplicitamente calcolati.

Sia X una variabile binomiale $Bin(3, 1/3)$. 1) Determinare la densità discreta di X e la funzione di distribuzione di X . 2) Calcolare la densità congiunta di X e X^2 , 3) Dire se X e X^2 sono indipendenti e motivarne la risposta, 4) Calcolare $Cov(2X - 1, X^3)$.