

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (08/02/06)

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 min.

Nota: in assenza di indicazioni specifiche è sufficiente indicare le soluzioni come espressioni algebriche contenenti fattoriali, coefficienti binomiali, coefficienti multinomiali.

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p , allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1 - p)$.

Se X è v.a. geometrica di parametro p , allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1 - p)/p^2$.

Se X è v.a. di Poisson con parametro l , allora $E(X) = l$, $Var(X) = l$.

Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N - m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1 - p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1

Andrea, Maria e Carlo fanno parte di un gruppo di 30 ragazzi assunti a part-time da una società di volantinaggio. I 30 ragazzi vengono divisi in tre gruppi: il gruppo A con 12 componenti, il gruppo B con 12 componenti e il gruppo C con 6 componenti. Il gruppo A distribuisce volantini a Trastevere, il gruppo B all'EUR e il gruppo C a San Lorenzo.

Supponendo che tutte le possibili suddivisioni dei 30 ragazzi nei gruppi A,B,C siano equiprobabili determinare la probabilità dei seguenti eventi:

- 1) Andrea e Maria appartengono allo stesso gruppo,
- 2) Andrea, Maria e Carlo appartengono a tre gruppi differenti,
- 3) almeno due dei tre amici (Andrea, Maria e Carlo) stanno nello stesso gruppo,
- 4) Maria appartiene al gruppo B condizionata al fatto che Andrea appartiene al gruppo A e Carlo appartiene al gruppo C.

ESERCIZIO 2

Da un mazzo di 40 carte si estraggono a caso 5 carte senza rimpiazzo. Chiamare X il numero di assi tra le carte estratte e Y il numero di carte con segno denari tra le carte estratte.

- 1) Determinare la densità discreta di X e di Y .
- 2) Determinare la funzione di distribuzione di X .
- 3) Calcolare $E(X)$, $E(Y)$, $E(X + Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$. *Nota: dare il risultato della forma a/b con a, b interi*
- 4) X e Y sono indipendenti? (Motivarne la risposta)

ESERCIZIO 3 (I dati di questo esercizio sono di pura fantasia)

La probabilità di essere affetti della malattia α è pari a $2/1000$. Il test per verificare la presenza della malattia α è efficace sugli individui sani con probabilità $97/100$ (cioè se un individuo sano fa il test allora dal test risulta che è sano con probabilità $97/100$) mentre è efficace sugli individui malati con probabilità $95/100$.

- 1) Dire qual è la probabilità che facendo fare il test ad un individuo scelto a caso questo risulti dal test essere sano.

2) Dire qual è la probabilità che un individuo sia malato condizionata al fatto che dal test risulti malato.

ESERCIZIO 4

Considerare il seguente gioco: un dado viene lanciato 7 volte di seguito in modo indipendente, ad ogni lancio si vincono 2 euro se esce il numero 1 o il numero 2 altrimenti si perde 1 euro.

Chiamata X la vincita totale, determinare

1) la densità discreta di X ,

2) $E(X)$, $Var(X)$, $Cov(X, X)$ *Nota: dare il risultato della forma a/b con a, b interi.*

Si ripete il gioco in modo indipendente fino a quando si ha una vincita totale negativa. Definito T il numero di giocate effettuate (incluso nel conteggio di T la giocata con vincita totale negativa) si determini $E(T)$.