

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (14/02/07)

Tempo a disposizione: 2 ore

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p , allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1 - p)$.

Se X è v.a. geometrica di parametro p , allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1 - p)/p^2$.

Se X è v.a. di Poisson con parametro λ , allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.

Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N - m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1 - p)$ dove $p = m/N$.

NOTA. Nell'esercizio 1, punti 1),2) e 3), i risultati possono essere dati come espressioni algebriche eventualmente contenenti fattoriali e coefficienti binomiali (quindi non è necessario svolgere tutti i calcoli).

Ad eccezione dei punti 1),2) e 3) dell'esercizio 1, i risultati finali devono essere in forma di frazioni a/b , con a e b numeri interi esplicitamente calcolati.

Non è consentito l'uso di calcolatrici.

ESERCIZIO 1.

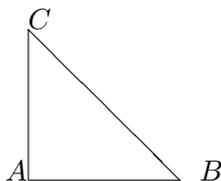
Si estraggono senza rimpiazzo 4 carte da un mazzo da 52 carte. Si vince 1 euro per ogni carta di quadri estratta, 2 euro per ogni carta di picche estratta, 3 euro per ogni carta di fiori estratta e si perdono 4 euro per ogni carta di cuori estratta.

Determinare:

- 1) la probabilità di avere carte tutte di seme diverso.
- 2) la probabilità di avere carte tutte di seme diverso sapendo che è stata estratta esattamente una carta di fiori.
- 3) la probabilità di avere carte tutte di seme diverso sapendo che è stata estratta almeno una carta di fiori.
- 4) Determinare la vincita media.

ESERCIZIO 2.

Si consideri il triangolo ABC:



Ogni lato viene colorato di rosso o giallo o verde indipendentemente dagli altri lati. La probabilità che un dato lato venga colorato di rosso è $4/6$, di giallo è $1/6$, di verde è $1/6$. Si considerino le variabili aleatorie X, Y, Z definite come segue: X è il numero di lati rossi, Y è il numero di lati gialli, Z è il numero di lati verdi.

- 1) determinare la probabilità che tutti i lati siano dello stesso colore,
- 2) determinare la probabilità che tutti i lati siano di colore diverso l'uno dall'altro,

- 3) determinare la densità congiunta di X, Y, Z ,
- 4) dire se X è variabile aleatoria speciale e determinare $Var(X)$,
- 5) dire se X, Y e Z sono variabili aleatorie indipendenti giustificando la risposta.

ESERCIZIO 3.

- 1) Dire se esiste una v.a. Z a valori $\{-1, 2, 4\}$ la cui densità discreta è

$$P_Z(-1) = 0.1, \quad P_Z(2) = 0.4, \quad P_Z(4) = 0.5$$

(giustificare la risposta).

- 2) Dire se esiste una v.a. Z a valori $\{0, 1, 10\}$ la cui densità discreta è

$$P_Z(0) = 0.2, \quad P_Z(1) = 0.4, \quad P_Z(10) = 0.5,$$

(giustificare la risposta).

- 3) Dire se esistono (giustificando la risposta) variabili aleatorie X e Y , con X a valori in $\{-10, 0, 10\}$ e Y a valori in $\{1, 2\}$, la cui densità congiunta è rappresentata dalle entrate della seguente tabella:

$X \setminus Y$	1	2
-10	1/10	0
0	3/10	2/10
10	3/10	1/10

(cioè $p_{(X,Y)}(-10, 1) = 1/10$, $p_{(X,Y)}(0, 1) = 3/10$, $p_{(X,Y)}(10, 1) = 3/10, \dots$).

In caso affermativo determinare la densità discreta di X , la densità discreta di Y , la funzione di distribuzione di Y . Calcolare $E(X - 3Y)$, $E(XY^3 - 2Y^2)$, $Var(2X - 3Y)$. Inoltre dire se X e Y sono indipendenti e giustificarne la risposta.