

## Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (06/02/08)

Tempo a disposizione: 2 ore.

**Non è consentito l'uso di calcolatrici**

### FORMULARIO

Se  $X$  è v.a. binomiale di parametri  $n, p$ , allora  $E(X) = np$ ,  $Var(X) = np(1 - p)$ .

Se  $X$  è v.a. geometrica di parametro  $p$ , allora  $E(X) = 1/p$ ,  $Var(X) = (1 - p)/p^2$ .

Se  $X$  è v.a. di Poisson con parametro  $\lambda$ , allora  $E(X) = \lambda$ ,  $Var(X) = \lambda$ .

Se  $X$  è v.a. ipergeometrica di parametri  $n, N, m$  (tipo: estraggo senza rimpiazzo  $n$  palline da un'urna con  $m$  palline bianche e  $N - m$  palline nere e  $X$  è il numero di palline bianche estratte) allora  $E(X) = nm/N$  e  $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1 - p)$  dove  $p = m/N$ .

### ESERCIZIO 1

Il test per verificare se una persona soffre della malattia  $\alpha$  funziona correttamente sulle persone sane con probabilità  $8/10$  (cioè, se la persona è effettivamente sana, il test afferma che la persona è sana con probabilità  $8/10$ ) e funziona correttamente sulle persone malate con probabilità  $9/10$ .

In una clinica si segue la seguente procedura per verificare se la persona soffre della malattia  $\alpha$ : si ripete tre volte il suddetto test, se risulta che la persona è sana in almeno 2 test la clinica considera la persona sana, altrimenti la clinica considera la persona malata.

Sapendo che il 4% della popolazione soffre della malattia  $\alpha$ ,

- 1) determinare la probabilità che una persona a caso, controllata dalla clinica, venga dichiarata dalla clinica affetta della malattia  $\alpha$ , [non serve svolgere tutti i calcoli]
- 2) calcolare la probabilità che una persona dichiarata dalla clinica affetta dalla malattia  $\alpha$  lo sia veramente [non serve svolgere tutti i calcoli].

### ESERCIZIO 2

Si consideri il vettore aleatorio  $(X, Y, Z)$  che assume valori in  $\mathcal{H} := \{-1, 1\}^3$  con la seguente probabilità discreta  $p = p_{(X,Y,Z)}$

$$\begin{aligned} p(-1, -1, -1) &= 1/8, & p(-1, -1, 1) &= 2/8, & p(-1, 1, -1) &= 0, & p(-1, 1, 1) &= 1/8, \\ p(1, -1, -1) &= 2/8, & p(1, -1, 1) &= 0, & p(1, 1, -1) &= 0, & p(1, 1, 1) &= 2/8. \end{aligned}$$

- 1) Dire se un tale vettore aleatorio esiste e motivarne la risposta.

In caso affermativo, considerare i seguenti quesiti:

- 2) determinare le densità discrete di  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ ,
- 3) determinare la funzione di distribuzione di  $X$ ,
- 4) calcolare  $E(3XYZ + 4Z)$ ,
- 5) calcolare  $Var(X)$ ,
- 6) calcolare  $Var(X + Z)$
- 7) dire se  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  sono indipendenti.

**Nota:** per i quesiti (4), (5) e (6) bisogna svolgere i calcoli e dare la soluzione come numero frazionario.

**ESERCIZIO 3** Si consideri il seguente episodio di Guerre Stellari: *mentre Dart Fener ha quasi sottomesso l'intera galassia, i pianeti Alpha, Beta e Gamma9 decidono di allearsi e di combattere contro Dart Fener formando un gruppo speciale di 60 agenti segreti. Ciascun pianeta mette a disposizione 20 agenti segreti, di cui 5 sono uomini, 5 sono donne, 5 sono bambini e 5 sono bambine. Per compiere una missione speciale sul pianeta Ciccolo, vengono scelti a caso 4 tra i 60 agenti. Determinare la probabilità dei seguenti eventi:*

- 1) i 4 agenti sono abitanti dello stesso pianeta,
- 2) i 4 agenti sono tutti bambini (maschi),
- 3) i 4 agenti sono tutte donne o tutti abitanti del pianeta Alpha.
- 4) Supponendo che ciascun agente coinvolto nella missione speciale sul pianeta Ciccolo abbia probabilità  $8/10$  di sopravvivere, indipendentemente dalla sorte dei colleghi, calcolare dando la soluzione come numero frazionario  $E(X)$  e  $Var(X)$ , dove  $X$  è il numero degli agenti che sopravviveranno.