

Calcolo delle Probabilità. Esonero parziale (15/01/07)

Tempo a disposizione: 1 ora e 30 min.

Nota. In tutti gli esercizi, i risultati finali devono essere in forma di frazioni a/b , con a e b numeri interi esplicitamente calcolati. **Non è consentito l'uso di calcolatrici**

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p , allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1 - p)$.

Se X è v.a. geometrica di parametro p , allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1 - p)/p^2$.

Se X è v.a. di Poisson con parametro λ , allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.

Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N - m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1 - p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1

Vi sono tre borghi di montagna: Chaulis, Dierico e Lovea. A Chaulis vivono 20 ragazzi, 20 adulti e 30 anziani. A Dierico vivono 20 ragazzi, 30 adulti e 20 anziani. A Lovea vivono 20 ragazzi, 40 adulti e 10 anziani.

Al fine di effettuare un sondaggio, vengono contattati a caso 10 persone per ognuno dei suddetti tre borghi (10 a Chaulis, 10 a Dierico e 10 a Lovea).

Definire X come il numero complessivo di ragazzi contattati, Y come il numero complessivo di adulti contattati e Z come il numero complessivo di anziani contattati.

- 1) Determinare $E(Y)$, $Var(Y)$.
- 2) Dire se X, Y, Z sono indipendenti e giustificarne la risposta.

ESERCIZIO 2 Si consideri il seguente gioco a premi. Un'urna contiene 10 palline: 4 verdi, 3 rosse e 3 gialle. Si lancia una moneta truccata per cui la probabilità di avere testa è $1/3$ e di avere croce è $2/3$. Se esce testa si estrae una pallina dall'urna, mentre se esce croce si estraggono 2 palline senza rimpiazzo dall'urna. Alla fine, si vincono tanti euro quante le palline verdi estratte.

- 1) Chiamata X la vincita, si determini la densità discreta di X , $E(X)$ e $Var(X)$.
- 2) Determinare la probabilità che il lancio della moneta abbia dato testa sapendo che al termine del gioco la vincita è pari ad 1 euro.
- 3) Dopo avere reinserito le palline estratte si ripete il gioco e si continua a giocare fino all'estrazione di 2 palline verdi. Chiamato Y il numero di partite effettuate, determinare $E(Y)$, $Var(Y)$ e la probabilità che $Y = 2$.

ESERCIZIO 3

1) Dire se esistono variabili aleatorie X e Y , con X a valori in $\{0, 1, 2\}$ e Y a valori in $\{-1, 1\}$, la cui densità congiunta è rappresentata dalle entrate della seguente tabella:

$X \setminus Y$	-1	1
0	1/2	0
1	1/6	1/6
2	1/3	1/6

(cioè $p_{(X,Y)}(0, -1) = 1/2$, $p_{(X,Y)}(0, 1) = 0$, $p_{(X,Y)}(1, -1) = 1/6, \dots$).

In caso affermativo determinare la densità discreta di X , la densità discreta di Y , la funzione di distribuzione di X . Calcolare $E(10X + Y)$, $E(10X + Y^2)$, $E(X^2Y + 5)$, $Var(X + 2Y)$. Inoltre dire se X e Y sono indipendenti e giustificarne la risposta.

2) Ripetere l'esercizio al punto 1) considerando come nuova densità congiunta quella rappresentata dalle entrate della seguente tabella:

$X \setminus Y$	-1	1
0	1/2	1/6
1	1/6	0
2	0	1/6