

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (23/01/08)

Tempo a disposizione: 2 ore.

Nota. Soltanto nei punti 4) dell'esercizio 1 e nei punti 2), 4), 5) e 6) dell'esercizio 2, i risultati finali devono essere in forma di frazioni a/b , con a e b numeri interi **ESPLICITAMENTE** calcolati. **Non è consentito l'uso di calcolatrici**

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p , allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1 - p)$.

Se X è v.a. geometrica di parametro p , allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1 - p)/p^2$.

Se X è v.a. di Poisson con parametro λ , allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.

Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N - m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1 - p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1

Si estraggono 6 carte da un mazzo di 40 carte. Determinare la probabilità dei seguenti eventi:

- 1) le carte hanno tutte lo stesso seme,
- 2) le carte estratte non sono di denari né di bastoni,
- 3) tre carte hanno lo stesso seme, le altre tre carte hanno lo stesso seme, e i due semi in questione sono diversi,
- 4) Chiamato X il numero di carte di denari o di coppe tra quelle estratte, calcolare esplicitamente come numeri frazionari $E(X)$, $E(X^2)$ e $Var(X)$.
- 5) Chiamato Y il numero di assi tra le carte estratte, dire se X e Y sono v.a. indipendenti e motivarne la risposta.
- 6) Chiamato Z il numero di fanti tra le carte estratte, determinare la densità congiunta di Y e Z .
- 7) X, Y e Z sono indipendenti? motivarne la risposta.

ESERCIZIO 2

Bob trasmette ad Alice messaggi tramite un canale di trasmissione ternario: il messaggio che Bob può inviare è una stringa finita di cifre 0,1,2 (es. 0011222).

La trasmissione di ciascuna cifra è indipendente dalla trasmissione delle altre cifre e a causa del rumore si hanno le seguenti possibilità di errore:

se Bob invia 0, Alice riceve 0 con probabilità 0.8, riceve 1 con probabilità 0.1 e riceve 2 con probabilità 0.1,

se Bob invia 1, Alice riceve 0 con probabilità 0.2, riceve 1 con probabilità 0.7 e riceve 2 con probabilità 0.1,

se Bob invia 2, Alice riceve 0 con probabilità 0.1, riceve 1 con probabilità 0.1 e riceve 2 con probabilità 0.8.

Bob invia il messaggio 000121202.

- 1) Determinare la probabilità che Alice riceva il messaggio di Bob correttamente.
 - 2) Chiamato X il numero di cifre del messaggio trasmesse correttamente, calcolare esplicitamente come numeri frazionari $E(X)$, $Var(X)$.
 - 3) Determinare la probabilità che una sola cifra del messaggio sia stata trasmessa in modo errato. Supporre ora che Bob trasmetta una stringa di due cifre, scegliendola con uguale probabilità tra tutte le possibili stringhe di due cifre.
 - 4) Calcolare esplicitamente come numero frazionario la probabilità che Alice riceva la stringa "00".
 - 5) Calcolare esplicitamente come numero frazionario la probabilità che Bob abbia inviato la stringa "00" condizionata al fatto che Alice ha ricevuto la stringa "00".
- Immaginare ora che Bob continui ad inviare ad Alice stringhe di 2 cifre, scegliendole ogni volta a caso tra tutte le possibili stringhe di due cifre.
- 6) Chiamato Y il numero di stringhe ricevute da Alice fino al ricevimento della stringa "00" (questa sia inclusa nel conteggio di Y), calcolare esplicitamente come numero frazionario $E(Y)$.