

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (29/01/07)

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 min.

NOTA. Nell'esercizio 2 i risultati possono essere dati come espressioni algebriche eventualmente contenenti fattoriali e coefficienti binomiali (quindi non è necessario svolgere tutti i calcoli).

In tutti gli altri esercizi, i risultati finali devono essere in forma di frazioni a/b , con a e b numeri interi esplicitamente calcolati.

Non è consentito l'uso di calcolatrici.

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p , allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1 - p)$.

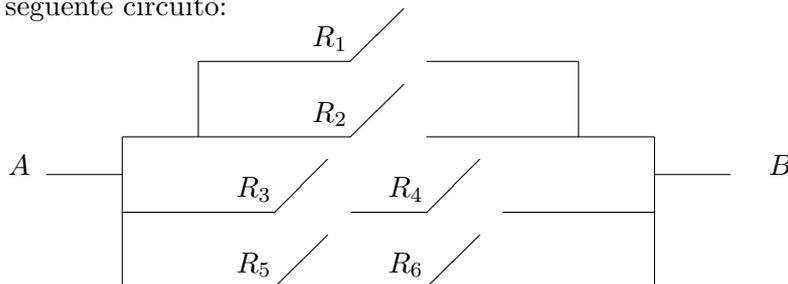
Se X è v.a. geometrica di parametro p , allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1 - p)/p^2$.

Se X è v.a. di Poisson con parametro λ , allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.

Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N - m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1 - p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1

Considerare il seguente circuito:



Ogni relè (interruttore) R_1, R_2, \dots, R_6 è chiuso con probabilità $1/3$, indipendentemente dagli altri.

- 1) Determinare la probabilità che passi corrente da A a B .
- 2) Determinare la probabilità che R_3, R_4 siano chiusi sapendo che passa corrente da A a B .
- 3) Chiamato X il numero di relè chiusi, determinare $E(X)$, $E(X^2)$.

ESERCIZIO 2

Da un mazzo di 40 carte si estraggono 4 carte senza rimpiazzo. Determinare:

- 1) la probabilità di estrarre l'asso di bastoni e l'asso di denari,
- 2) la probabilità di estrarre esattamente 3 assi,
- 3) la probabilità di estrarre 0 assi sapendo che una delle carte estratte è il 7 di bastoni,
- 4) la probabilità di estrarre almeno un asso sapendo che una delle carte estratte è il 7 di bastoni,
- 5) la probabilità di estrarre 2 coppie di carte dello stesso seme (cioè 2 carte sono dello stesso seme, le restanti 2 carte sono dello stesso seme e i semi delle 2 coppie sono diversi),
- 6) la probabilità di estrarre 3 carte dello stesso seme e la restante carta di un seme diverso.

ESERCIZIO 3

Si consideri il seguente gioco.

Un'urna contiene 3 palline rosse, 2 palline gialle e 1 pallina verde. Si estraggono 2 palline senza rimpiazzo. Si perde 1 euro per ogni pallina rossa estratta, si vincono 2 euro per ogni pallina gialla estratta e si vincono 5 euro per ogni pallina verde estratta.

Si definiscano X_1, X_2, X_3 rispettivamente come il numero di palline rosse estratte, il numero di palline gialle estratte e il numero di palline verdi estratte. Inoltre, sia X la vincita totale.

- 1) Determinare la densità congiunta di X_1, X_2, X_3 .
- 2) Calcolare $E(X), Var(X)$ e $E(X_1 \cdot X_2)$.
- 3) Dire se X_1, X_2 sono indipendenti e giustificarne la risposta.
- 4) Dire se X_1, X_2, X_3 sono indipendenti e giustificarne la risposta.
- 5) Supponendo di ripetere il gioco (reinserendo ogni volta le palline estratte) fino a quando la pallina verde viene estratta, determinare il valor medio di giocate complessivamente effettuate.

ESERCIZIO 4

Dire se esistono variabili aleatorie X e Y , con X a valori in $\{-3, 3\}$ e Y a valori in $\{-3, 0, 3\}$, la cui densità congiunta è rappresentata dalle entrate della seguente tabella:

$X \setminus Y$	-3	0	3
-3	8/18	2/18	2/18
3	4/18	1/18	1/18

(cioè $p_{(X,Y)}(-3, -3) = 8/18, p_{(X,Y)}(-3, 0) = 2/18, p_{(X,Y)}(-3, 3) = 2/18, \dots$).

In caso affermativo determinare la densità discreta di X , la densità discreta di Y , la funzione di distribuzione di Y . Calcolare $E(3X - Y), E(X^3 + Y), E(X^2Y^2 + 1), Var(2X - 2Y)$. Inoltre dire se X e Y sono indipendenti e giustificarne la risposta.