Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (12/06/06)

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 min.

Nota: In tutti gli esercizi escluso l'esercizio 3 le soluzioni numeriche possono essere date come prodotto di frazioni. Nell'esercizio 3 è consentito dare soluzioni come frazione di prodotti di coefficienti binomiali. **Non è consentito l'uso della calcolatrice**

ESERCIZIO 1

Siano X e Y variabili aleatorie di Poisson con parametro rispettivamente 4 e 3, indipendenti.
1) Calcolare $E(3XY + Y + X^2)$, $\mathrm{Cov}(X + Y, 3X + Y)$.
2) Dire (e motivarne la risposta) se $E(X^{12}) \leqslant E(X^{200})$.

ESERCIZIO 2

Il cuoco di una mensa aperta solo a pranzo decide il menu del giorno secondo il seguente sistema:

Con probabilità $3/4$ *il primo è pasta e con probabilità* $1/4$ *è riso. Se il primo è pasta allora con probabilità* $1/2$ *il secondo è carne e con probabilità* $1/2$ *il secondo è pesce. Mentre se il primo è riso allora con probabilità* $2/3$ *il secondo è carne e con probabilità* $1/3$ *il secondo è pesce.* Il cuoco decide il menu nei vari giorni in modo indipendente seguendo il metodo suddetto. La mensa è funzionante tutti i giorni dell'anno.

Considerare le variabili aleatori X, Y, Z, W definite come segue:
X è il numero di giorni in una settimana in cui si mangia pasta,
Y è il numero di giorni in una settimana in cui si mangia riso,
Z è il numero di giorni in una settimana in cui si mangia carne,
W è il numero di giorni in una settimana in cui si mangia pesce.
1) Calcolare la probabilità che in un dato giorno il primo piatto sia riso sapendo che il secondo è carne.
2) Dire se X e Y sono indipendenti.
3) Dire se X e Z sono indipendenti.
4) Calcolare media e varianza di X e di Z.

ESERCIZIO 3

Un'urna contiene 10 palline numerate da 1 a 10. Le palline numerate da 1 a 5 sono verdi e quelle numerate da 6 a 10 sono gialle.

Si estraggono senza rimpiazzo 3 palline a caso dall'urna. Reintrodotte nell'urna si ripete l'estrazione (in modo indipendente).

Determinare la probabilità dei seguenti eventi:
1) in entrambe le estrazioni vengono estratte solo palline verdi,
2) tra le palline estratte alla prima estrazione e le palline estratte alla seconda estrazione vi è esattamente una pallina in comune,
3) la probabilità che alla seconda estrazione siano uscite esattamente 2 palline verdi sapendo che le palline estratte alla prima estrazione sono tutte gialle e che non vi sono palline in comune tra la prima e la seconda estrazione.

ESERCIZIO 4

Una stringa binaria è una successione finita di 0 e 1, ad esempio

$$0110111100. \tag{0.1}$$

Consideriamo un sistema di copiatura con le seguenti proprietà: data una stringa questa viene ricopiata entrata per entrata in modo indipendente e ogni singola entrata di valore 0 è copiata come 0 (cioè correttamente) con probabilità 2/3 e come 1 con probabilità 1/3,mentre ogni entrata di valore 1 è copiata come 1 (cioè correttamente) con probabilità 4/5 e come 0 con probabilità 1/5,

Data la stringa S chiamiamo S' la "copia" di S ottenuta con il suddetto sistema di copiatura e chiamiamo S'' la "copia" di S' ottenuta applicando nuovamente il suddetto sistema di copiatura. Definiamo N il numero di zeri che compaiono in S'.
1) Se S è la stringa definita in (0.1), quant'è la probabilità che $S' = 0000000000$?
2) Determinare media e varianza di N quando S è la stringa definita in (0.1).
3) Se $S = 0$ quant'è la probabilità che $S'' = 0$?
4) Se $S = 0$ quant'è la probabilità che $S'' = 1$?
5) Se $S = 00$ quant'è la probabilità che $S'' = 01$?

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $\mathbb{E}(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $\mathbb{E}(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $\mathbb{E}(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.