

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (27/06/07)

Tempo a disposizione: 2 ore.

Nota. In tutti gli esercizi, tranne che per i punti (2) e (3) dell'esercizio 2, i risultati finali devono essere in forma di frazioni a/b , con a e b numeri interi **ESPLICITAMENTE** calcolati. **Non è consentito l'uso di calcolatrici**

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p , allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1 - p)$.

Se X è v.a. geometrica di parametro p , allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1 - p)/p^2$.

Se X è v.a. di Poisson con parametro λ , allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.

Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N - m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1 - p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1

Da un'urna contenente 10 palline numerate da 1 a 10 si estraggono 3 palline, una dopo l'altra e senza rimpiazzo.

Si considerino i seguenti eventi:

E="le prime due palline hanno numeri pari",

F="la terza pallina ha un numero dispari",

G="vengono estratte due palline con numeri pari ed una pallina con numero dispari",

H="viene estratta almeno una pallina con numero pari".

1) Calcolare le probabilità $P(E)$, $P(F)$, $P(G)$, $P(H)$.

2) Dire se E, F, G sono eventi indipendenti e motivarne la risposta,

3) Dire se E, F, G, H sono eventi indipendenti e motivarne la risposta,

Si consideri il seguente gioco a premi: effettuata l'estrazione delle tre palline come sopra si vincono 3 euro se l'evento F si verifica, altrimenti si perdono 2 euro.

4) Determinare la vincita media.

Immaginare di ripetere il gioco a premi fino al verificarsi dell'evento F (dopo ogni giocata, la tre palline estratte vengono reinserite) e sia T il numero di giocate effettuate (inclusa quella vincente).

5) Determinare $E(T)$ e $E(2T^2 + 1)$.

ESERCIZIO 2

Marco partecipa ad un concorso che consiste in 3 test a risposta multipla: un test di diritto, un test di economia ed un test di storia.

Il test di diritto consiste in 10 quesiti e per ogni quesito sono proposte 4 risposte.

Il test di economia consiste in 8 quesiti e per ogni quesito sono proposte 3 risposte.

Il test di storia consiste in 6 quesiti e per ogni quesito sono proposte 2 risposte.

Marco non si è preparato per il concorso e decide di svolgere i tre test scegliendo per ogni quesito la risposta completamente a caso tra quelle proposte.

1) Chiamato X il numero complessivo di risposte corrette date da Marco nei tre test, determinare $E(X)$, $Var(X)$, $Var(10X - 11)$.

2) Determinare la probabilità che Marco abbia risposto esattamente a 0 domande. (È

sufficiente dare la soluzione come espressione algebrica, senza svolgere i calcoli).

3) Determinare la probabilità che Marco abbia risposto esattamente ad una sola domanda.

(È sufficiente dare la soluzione come espressione algebrica, senza svolgere i calcoli).

ESERCIZIO 3

1) Sia X una variabile aleatoria discreta con funzione di distribuzione F_X data da

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < -2, \\ 2/8 & \text{se } -2 \leq a < 0, \\ 3/8 & \text{se } 0 \leq a < 1, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare la densità discreta p_X di X e calcolare $E(X)$, $E(3X+1)$, $E(3X^2+1)$, $Var(X)$.

2) Dire se esiste (motivandone la risposta) una variabile aleatoria discreta X con funzione di distribuzione F_X data da

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < -5, \\ 1/5 & \text{se } -5 \leq a < 0, \\ 4/5 & \text{se } a \geq 0. \end{cases}$$

3) Dire se esistono (motivandone la risposta) variabili aleatorie discrete X e Y , con X a valori in $\{-1, 1\}$ e Y a valori in $\{0, 1, 2\}$, la cui densità congiunta è rappresentata dalle entrate della seguente tabella:

$X \setminus Y$	0	1	2
-1	1/6	2/6	0
1	1/6	1/6	1/6

(cioè $p_{(X,Y)}(-1, 0) = 1/6$, $p_{(X,Y)}(-1, 1) = 2/6, \dots$).

In caso affermativo determinare la densità discreta di X , la densità discreta di Y , la funzione di distribuzione di X , la funzione di distribuzione di Y . Calcolare $E(XY^2 + 3X)$, $Cov(X, Y)$, $Cov(2X + 1, Y)$. Inoltre dire se X e Y sono indipendenti e giustificare la risposta.