Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (12/06/06)

Tracce delle soluzioni

ESERCIZIO 1

1) Abbiamo: $E(X) = Var(X) = 4$, $E(X^2) = Var(X)+E(X)^2 = 20$, $E(Y) = Var(Y) = 3$. Grazie alla linearità del valore atteso e all'indipendenza di X, Y abbiamo

$$E(3XY + Y + X^2) = 3E(X)E(Y) + E(Y) + E(X^2) = 3 \cdot 4 \cdot 3 + 3 + 20 = 59$$

e

$$Cov(X + Y, 3X + Y) = Cov(X, 3X) + Cov(Y, Y) = 3Var(X) + Var(Y) = 15$$

2) Siccome X ha valori in $\mathbb{N}$, $X^{12} \leqslant X^{200}$. Per la proprietà di monotonia di $E(\cdot)$ abbiamo che $E(X^{12}) \leqslant E(X^{200})$

ESERCIZIO 2

Considerare i seguenti eventi riferiti al menù di un dato giorno:
A= il primo è pasta,
B= il primo è riso,
C= il secondo è carne.

Abbiamo $P(A) = 3/4$
$P(B) = 1/4$,
$P(C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B) = \frac{3}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{2}{3} = \frac{13}{24}$

1) Per il teorema di Bayes

$$p = P(B|C) = \frac{P(C|B)P(B)}{P(C)} = \frac{2}{3}\frac{1}{4}\frac{24}{13} = \frac{4}{13}.$$

2) $X + Y = 7$ quindi X e Y non sono indipendenti. Ad esempio $p(X = 0, Y = 0) = 0$, mentre $P(X = 0) > 0, P(Y > 0) > 0$ e quindi $p(X = 0, Y = 0) \neq p(X = 0)p(Y = 0)$.

3) X e Z non sono indipendenti. Ad esempio $p(X = 0) = (1/4)^7$, $p(Z = 0) = (13/24)^7$ e $p(X = 0, Z = 0) = (1/4)^7(1/3)^7$. quindi $p(X = 0, Z = 0) \neq p(X = 0)p(Z = 0)$.

4) $X = Bin(7, 3/4)$, $Z = Bin(7, 13/24)$. Quindi

$$E(X) = 21/4, \qquad Var(X) = 21/16, \qquad E(Z) = 7 \cdot 13/24, \qquad Var(Z) = 7 \cdot (13/24) \cdot (11/24)$$

ESERCIZIO 3

1)

$$p_1 = \left(\frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} \right)^2$$

2)

$$p_2 = \frac{3\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}}$$

3)

$$p_3 = \frac{\binom{5}{3} 2 \binom{5}{2}}{\binom{5}{3}\binom{7}{3}}$$

ESERCIZIO 4

1) La stringa S ha 6 cifre pari a 1 e 4 cifre pari a 0. Per ottenere S' gli zeri devono essere copiati correttamente e gli uno erroneamente. per indipendenza abbiamo

$$p_1 = (2/3)^4 \cdot (1/5)^6$$

2) Sia N_a il numero di zeri di S copiati correttamente e N_b il numero di uni di S copiati erroneamente. Allora

$$N = N_a + N_b$$

Siccome $N_a = Bin(4, 2/3)$, $N_b = Bin(6, 1/5)$ e N_a, N_b sono indipendenti abbiamo

$$E(N) = E(N_a) + E(N_b) = 4 \cdot 2/3 + 6/5,$$

e

$$Var(N) = Var(N_a) + Var(N_b) = 4(2/3)(1/3) + 6(1/5)(4/5)$$

3) Scriviamo $p(y, z|x)$ per la probabilita' che, facendo 2 copie a partire dalla cifra x, la prima copia dia y e la seconda z. Allora $p(0, 0|0) = (2/3)^2 = 4/9$, $p(0, 1|0) = (2/3)(1/3) = 2/9$, $p(1, 0|0) = (1/3)(1/5) = 1/15$, $p(1, 1|0) = (1/3)(4/5) = 4/15$.

In particolare,

$$p(S'' = 0|S = 0) = p(0, 0|0) + p(1, 0|0) = 4/9 + 1/15 = 23/45$$

4) Si puo' ragionare come sopra o semplicemente osservare che

$$p(S'' = 1|S = 0) = 1 - p(S'' = 0|S = 0) = 22/45$$

5)

$$p(S'' = 01|S = 00) = p(S'' = 0|S = 0)p(S'' = 1|S = 0) = (23/45)(22/45).$$