Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (17/01/06)

Soluzioni (tracce)

ESERCIZIO 1

Chiamiamo p_1, p_2, p_3 la probabilità degli eventi rispettivamente ai punti (1), (2) , (3).
1) Indichiamo due modi per calcolare p_1.
Primo metodo: prendiamo come spazio campionario S l'insieme delle possibili mani di G_1. S ha esiti equiprobabili e $|S| = \binom{52}{13}$. Si ottiene

$$p_1 = \frac{\binom{4}{3}\binom{48}{10}}{\binom{52}{13}}$$

dato che vi sono $\binom{4}{3}$ modi di scegliere 3 assi tra 4 e $\binom{48}{10}$ modi di scegliere 10 tra le carte del mazzo che non sono assi.
Secondo metodo: prendiamo come spazio campionario S l'insieme delle possibili suddivisioni del mazzo tra i 4 giocatori. S ha esiti equiprobabili e $|S| = \binom{52}{13,13,13,13}$. Si ottiene

$$p_1 = \frac{\binom{4}{3}\binom{48}{10}\binom{39}{13,13,13}}{\binom{52}{13,13,13,13}}.$$

Infatti $\binom{4}{3}\binom{48}{10}$ corrisponde al numero di possibili mani del giocatore G_1. Avendo deciso quali carte riceve G_1 resta da ripartire le restanti 39 carte tra G_2, G_3, G_4.
È facile verificare che le due soluzioni coincidono.
2) Si conderino gli eventi E, E_i con $1 \leqslant i \leqslant 4$ dove: E= "almeno un giocatore riceve 3 assi", E_i="G_i riceve 3 assi". Allora

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4.$$

Poichè i suddetti eventi sono disgiunti abbiamo

$$p_2 = P(E) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4).$$

Per simmetria, $p_1 = P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4)$. Quindi

$$p_2 = 4p_1.$$

3) $p_3 = P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - p_2$.

ESERCIZIO 2

$$p_X(x) = \begin{cases} 2/9 & \text{se } x = 0, \\ 6/9 & \text{se } x = 1, \\ 1/9 & \text{se} x = 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$p_Y(x) = \begin{cases} 3/9 & \text{se } x = -1, \\ 2/9 & \text{se } x = 0, \\ 4/9 & \text{se } x = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 2/9 & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ 8/9 & \text{se } 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Dato che $E(X) = 8/9$ e $E(Y) = 1/9$, $E(10X - 2Y) = 10E(X) - 2E(Y) = 78/9$.
XY assume con probabilità positiva solo i valori $-1, 1$. Quindi

$$E(XY) = -P(XY = -1) + P(XY = 1) = -P(X = 1, Y = -1) + P(X = 1, Y = 1) = 1/9.$$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 10/9 - (8/9)^2 = 26/81$.
$Var(3X) = 9Var(X) = 26/9$.
$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1/9 - 8/81 = 1/81$.
X, Y non sono indipendenti, infatti

$$p_{(X,Y)}(0, 0) = 0 \neq 4/81 = p_X(0)p_y(0)$$

ESERCIZIO 3
Si considerino gli eventi F="esce testa", E="i turisti mangiano in una buona pizzeria e in una buona gelateria". La probabilità al punto (1) è data da $P(E)$, la probabilità al punto (2) è data da $P(F|E)$. Per calcolarle basta osservare che

$$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c), \qquad P(F|E) = P(E|F)P(F)/P(E).$$

Abbiamo

$$P(F) = P(F^c) = 1/2, \qquad P(E|F) = \frac{7}{8}\frac{3}{4}, \qquad P(E|F^c) = \frac{10}{12}\frac{4}{5}.$$

Sostituendo ottieamo

$$P(E) = 127/192, \qquad P(F|E) = 63/127.$$

ESERCIZIO 4
1)

$$P(N_A = k) = \begin{cases} \frac{\binom{3}{k}\binom{7}{4-k}}{\binom{10}{4}} & \text{se } k = 0, 1, 2, 3, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$P(N_B = k) = \begin{cases} \frac{\binom{3}{k}\binom{6}{5-k}}{\binom{9}{5}} & \text{se } k = 0, 1, 2, 3, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2) N_A è v.a. ipergeometrica di parametri $N = 10$, $m = 3$, $n = 4$ (si veda il formulario nel testo d'esame). N_B è v.a. ipergeometrica di parametri $N = 9$, $m = 3$, $n = 5$ Quindi

$$E(N_A) = 6/5,\ E(N_B) = 5/3,\ Var(N_A) = \frac{14}{25},\ Var(N_B) = 5/9.$$

Essendo $E(N_A + N_B) = E(N_A) + E(N_B)$ e $Var(N_A + N_B) = Var(N_A) + Var(N_B)$ (quest'ultima identità vale essendo N_A, N_B indipendenti), per sostituzione si ottiene

$$E(N_A + N_B) = 43/15,\ Var(N_A + N_B) = 251/255.$$

3) T è v.a. geometrica di parametro p dove

$$p = P(N_A \geqslant 1 \text{ o } N_B \geqslant 1) = 1 - P(N_A = 0, N_B = 0)$$

Grazie all'indipendenza

$$p = 1 - P(N_A = 0)P(N_B = 0) = 1 - \frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} \frac{\binom{6}{5}}{\binom{9}{5}}.$$

Vale $E(T) = 1/p$.