

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ I. a.a. 2015/2016. Informatica DIARIO DELLE LEZIONI

Testo di riferimento: Calcolo delle Probabilità, M.S. Ross (casa editrice Apogeo)

- **Settimana 28 settembre - 2 ottobre.** Principio fondamentale del calcolo combinatorio, permutazioni, combinazioni, teorema del binomio (non è richiesta la dimostrazione), coefficienti multinomiali, triangolo di Tartaglia (detto anche di Pascal).

Esercizi del libro di testo: 1,2,3,6,7,9,10,11,12,13 del cap.I

- **Settimana 5–9 ottobre.** teorema multinomiale, numero delle soluzioni intere positive dell'equazione $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$, numero delle soluzioni intere non negative dell'equazione $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$, spazio di probabilità, spazio campionario, funzione di probabilità, alcune conseguenze degli assiomi (additività finita, proposizioni 4.1 e 4.2 del capitolo 1), caratterizzazione della funzione di probabilità in spazi finiti con esiti equiprobabili

Esercizi del libro di testo: 19,20,22,22, 25,27,28,20, 31 del Cap.I

- **Settimana 12–16 Ottobre.** *Mercoledì la lezione è stata annulla perchè avevo un impegno in Francia. Venerdì l'Università era chiusa per Maker Faire.*

Evento certo, evento impossibile, evento elementare, eventi incompatibili. Estrazione di palline da un'urna contenente palline colorate di vari colori (trucco di numerare le palline dello stesso colore per renderle distinguibili e ridursi a lavorare con spazi campionari aventi esiti equiprobabili).

Esercizi del libro di testo: 3 (+ di tale esercizio calcolare la probabilità degli eventi da descrivere), 9, 10 del capitolo II.

Esercizio: Estraggo 4 carte da un mazzo da 40. Determinare la probabilità dei seguenti eventi: a) le carte estratte hanno lo stesso seme; b) le carte estratte hanno lo stesso valore; b) non si estraggono carte di bastoni; c) sono state estratte 2 carte di spade e 2 carte di bastoni.

- **Settimana 19–23 Ottobre.** Principio di inclusione-esclusione: enunciato con 2 eventi dato dalla prop. 4.3 nel cap II del libro ed enunciato generale dato dalla Prop. 4.4 nel cap II del libro (di entrambe le formulazioni va saputa la dimostrazione, in particolare per l'enunciato generale la dimostrazione sta nel file di integrazioni sulla mia wepbage)

Esempi del libro di particolare interesse: esempio 5d cap. II, esempio 5i del cap. II.

Esercizi del libro di testo: 28,33,35,36,37,41, 46, 47, 48, 50 del cap. II

Esercizio: Si estraggono 4 palline (senza rimpiazzo) da un'urna contenente 3 palline rosse, 4 palline bianche e 3 palline nere. Determinare la probabilità che vi sia almeno un colore che appare in esattamente 2 delle palline estratte.

- **Settimana 26–30 Ottobre** Dimostrazione del Principio di inclusione-esclusione (vedi file integrazioni). Proposizione 1 e Proposizione 2 del file di integrazione. Esempio 1 ed esempio 2 a pag. 4 del file di integrazione. La

probabilità come funzione di insieme continua (prop. 6.1 del cap. II del Ross).

Esercizi del libro di testo: 17, 18, 19, 23 del cap. II

- **Settimana 2–6 Novembre.** Probabilità condizionata $P(E|F)$. Legge delle probabilità composte (detta anche regola del prodotto).

Legge delle probabilità totali: Siano $F_1, \dots, F_n$ eventi che formano una partizione di S (cioè sono a 2 a 2 disgiunti e la loro unione dà S) tali che $P(F_i) > 0$ per ogni i . Allora, per ogni evento $E \subset S$, vale

$$P(E) = \sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i).$$

Teorema di Bayes: Siano $F_1, \dots, F_n$ eventi che formano una partizione di S (cioè sono a 2 a 2 disgiunti e la loro unione dà S) tali che $P(F_i) > 0$ per ogni i . Sia E un evento con $P(E) > 0$. Allora, per $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, vale

$$P(F_i|E) = \frac{P(E|F_i)P(F_i)}{\sum_{j=1}^n P(E|F_j)P(F_j)}.$$

Esempio 3a (I parte) cap 3, esempio 3a (II parte) cap. 3, esempio 3d cap. 3, esempio 3k cap. 3, esempio 3l cap. 3.

Esercizi del libro di testo: 5,9,10,12,15,16,20,23,24 del cap. III

- **Settimana 9–13 Novembre** Rapporto a favore, esempi di applicazione della formula (3.3) del cap. 3, prop. 5.1 del cap. 3. 2 eventi indipendenti, 3 eventi indipendenti, famiglia numerabile (finita o infinita) di eventi indipendenti, prop. 4.1 cap III libro ross, esempio 4f cap. 3 libro ross, esempio 4g cap. 3 libro ross. Esempio di tre eventi indipendenti a coppie ma non indipendenti (E ="simone e matteo hanno stesso compleanno", F ="matteo e carlo hanno stesso compleanno", G ="simone e carlo hanno stesso compleanno"). prove, prove indipendenti. Sezione 3 del file di integrazioni: spazio di probabilità prodotto (modellizza un esperimento formato da una famiglia finita di sotto-esperimenti operativamente indipendenti). Della sezione 3 del file di integrazioni non è richiesta la dimostrazione del punto (i) della proposizione 5.

Esercizi del libro di testo: 30,31 66,68, 48,49 del cap. III

- **Settimana 16–20 Novembre** Variabile aleatoria. Variabile aleatoria discreta. Densità discreta. Funzione di distribuzione. Valore atteso. Valore atteso di una funzione di variabile aleatoria (prop.4.1 del cap.4). Linearità del valore atteso (corollario 4.1 del cap. 4). varianza di una variabile aleatoria.

ESERCIZIO. Lancio 2 volte una moneta truccata (per cui testa esce con probabilità $1/3$) e una volta una moneta onesta. Calcolare la probabilità di avere esattamente 2 teste.

Esercizi del libro di testo: 57, 73 del cap. III, 1,4,13, 19, 21,25 Cap.4

- **Settimana 23–27 Novembre** Variabile aleatoria di Bernoulli. Calcolo valore atteso e varianza di v.a. di Bernoulli. Variabile aleatoria binomiale di parametri n e p (definizione, esempi, Prop. 6.1 del cap 4 del ross). Applicazione alla genetica (esempio 6d cap. 4). Valore atteso e varianza (solo

enunciato, per il momento senza dimostrazione) di una v.a. binomiale. variabile aleatoria geometrica (definizione ed esempi). valore atteso e varianza di v.a. geometrica (solo il valore atteso e' stato dimostrato, non è richiesto sapere a memoria la varianza). variabile binomiale negativa (definizione ed esempi). valore atteso e varianza di variabile binomiale negativa (non serve saperli a memoria, non e' richiesta dimostrazione per ora). variabile ipergeometrica (definizione ed esempi). valore atteso e varianza di variabile ipergeometrica (non serve saperli a memoria, non e' richiesta dimostrazione per ora). Stima del numero di membri di una popolazione con il metodo della verosimiglianza (esempio 8h cap.4)

Esercizi del libro di testo: 40, 42,43,44,74,75 , 78,79,82 cap IV.

- **Settimana 30 Novembre–4 Dicembre** Perdita di memoria della v.a. geometrica (v. file integrazioni). Variabile aleatoria di Poisson: definizione, esistenza. Approssimazione della v.a. binomiale con v.a. di Poisson - detta anche legge dei piccoli numeri (v. file integrazioni). Valore atteso e varianza di una v.a. di Poisson (dimostrazione solo per il valore atteso).

Dal file di integrazioni: v.a. m-dimensionale discreta, densità discreta di v.a. m-dimensionale discreta, densità congiunta, densità marginale.

Esercizi del libro di testo: 28, 35, 38, 42,45,48, 51,52,53 cap IV

- **Settimana 7–11 Dicembre** Dal file di integrazioni: Prop. 8. prop. 9 (solo enunciato), prop.10, esempio di variabili aleatorie con stesse densità marginali ma diverse densità congiunte (vedi esperimento 1 e 2 della sez. 5 del I file di integrazioni), v.a. indipendenti, prop.11, prop. 12 (solo enunciato).prop. 14 (solo enunciato), corollario 1 pagina 14, corollario 2 pag. 14. covarianza di due variabili aleatorie, prop.16, prop.17, prop.18.

Dal capitolo 7 del libro: valore atteso e varianza di v.a. binomiale (esempio 2e pagina 338, esempio 4b a pagina 364)) , valore atteso e varianza di v.a. binomiale negativa (esempio 2f a p.339 per avere il valore atteso. per avere la varianza osservare che le variabili $X_1, X_2, \dots, X_r$ nel suddetto esempio 2f sono indipendenti, quindi vale $Var(X) = Var(X_1) + \dots + Var(X_r)$ e le singole variante $Var(X_1), \dots, Var(X_r)$ sono tutte pari a $(1-p)/p^2$ essendo $X_1, \dots, X_r$ v.a. geometriche di parametro p . si conclude quindi che $Var(X) = r(1-p)/p^2$).

Esercizi del libro di testo: 1,2,6 del cap. 6, 83 e 84 del cap 4.

- **Settimana 14-18 Dicembre** Disuguaglianza di Markov (prop. 2.1 cap 8 libro), disuguaglianza di Chebyshev (prop. 2.2 cap 8 libro), esempio 2a cap. 8 libro, prop. 2.3 cap 8 libro, legge debole dei grandi numeri (teorema 2.1, cap. 8 libro) , legge forte dei grandi numeri (solo enunciato del teorema 4.1 cap.8 libro). interpretazione frequentistica della probabilità (sezione 12 file integrazione), proprietà di bilinearità della covarianza (prop.19 file integrazioni), funzione di densità $f(x)$ di una v.a. gaussiana di media μ e varianza σ^2 (formula inizio sezione 5.4 del cap 5, ross).

Def. Una variabile aleatoria X si dice gaussiana di media $\mu \in \mathbb{R}$ e varianza $\sigma^2 > 0$ se

$$P(X \in A) = \int_A f(x)dx, \quad \forall A \subset \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

teorema di De Moivre–Laplace (cap.5 , ross). solo enunciato-.

Esercizio 1: si allineano a caso 5 maschi e 4 femmine. determinare il valore atteso del numero di persone che alla loro destra hanno una femmina.

Esercizio 2. Siano X, Y v.a. con densità congiunta

$$p_{X,Y}(a, b) = \begin{cases} 1/9 & (a, b) = (-3, -1) \\ 2/9 & (a, b) = (-3, 0) \\ 1/9 & (a, b) = (-3, 2) \\ 0 & (a, b) = (4, -1) \\ 3/9 & (a, b) = (4, 0) \\ 2/9 & (a, b) = (4, 2) \end{cases}$$

Determinare $p_X, F_Y, Cov(X, Y), E(X^2Y - 3X)$