

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ I. a.a. 2016/2017. Informatica

Leggere attentamente le seguenti note

Modalità d'esame. L'esame consta di uno scritto con esercizi (bisogna prenotarsi su infostud). Chi passa questo scritto è ammesso a svolgere un secondo scritto di carattere teorico, che può essere - a discrezione dello studente - nello stesso appello o in un altro (nel secondo caso bisognerà riprenotarsi su infostud). Se il secondo scritto di carattere teorico non è sufficiente lo studente deve ripetere tutto, in quanto viene automaticamente annullato anche lo scritto con gli esercizi.

Gli argomenti di sola verifica teorica sono quelli riguardanti: disuguaglianza di Markov, disuguaglianza di Chebyshev, legge debole dei grandi numeri, legge forte dei grandi numeri, variabili aleatorie continue, teorema di De Moivre-Laplace e il teorema del limite centrale.

L'esame scritto di carattere teorico sarà un sottinsieme della lista di quesiti riportata sotto. **La lista non è ancora definitiva, la ricontrollo ed eventualmente estendo nella settimana 9-13 gennaio.** La seguente lista rappresenta i quesiti che possono essere sorteggiati per la prova scritta di carattere teorico. I quesiti saranno sorteggiati con uniforme probabilità, salvo aggiustamenti per garantire che vi sia almeno una dimostrazione. Per motivi di tempo, se vi sono molte dimostrazioni, ad alcuni quesiti sarà rimossa la richiesta di inserire la dimostrazione, ma ci sarà sempre almeno una dimostrazione.

Sotto: Il "file" è il file di integrazioni. Il ross a cui mi riferisco è la terza edizione.

Vanno dimostrate le affermazioni solo quando richieste esplicitamente.

Lista preliminare dei quesiti

- (1) Enunciare il principio fondamentale del calcolo combinatorio (con 2 esperimenti e poi con r esperimenti).
vedi ross, cap. 1
- (2) Definire il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$, definire il coefficiente multinomiale, enunciare il teorema del binomio e il teorema del multinomio. Dare dimostrazione combinatorica delle identità:
 - (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ per $0 \leq k \leq n$ con n, k interi,
 - (b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ per $1 \leq k \leq n$ con n, k interi.*vedi ross, cap.1*
- (3) Definire lo spazio di probabilità enunciando anche gli assiomi. Usando questa definizione dimostrare le seguenti proprietà: (a) $P(\emptyset) = 0$, (b) additività finita, (c) $P(E^c) = 1 - P(E)$, (d) se $E \subset F$ allora $P(E) \leq P(F)$.
vedi ross cap.2, sezioni 3 e 4. vedi def.1 del file
- (4) Dimostrare che dati eventi $E_1, E_2, \dots, E_n$ vale $P(\cup_{i=1}^n E_i) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i)$.
vedi prop. 2 file
- (5) Dimostrare che, per S spazio campionario numerabile, $P(E) = \sum_{s \in S} P(\{s\})$ per ogni $E \subset S$.
vedi prop.1 file

- (6) Definire gli spazi con esiti equiprobabili e derivare come si calcola $P(E)$ per ogni evento $E \subset S$.
sez.2.5 ross
- (7) Enunciare il principio di inclusione/esclusione e provarlo nel caso dell'unione di 2 eventi.
vedi ross, cap 2, prop.4.3 e prop.4.4
- (8) Definire una successione monotona di eventi, l'evento limite, enunciare il teorema di continuità per la funzione di probabilità e darne la dimostrazione
vedi ross, sez.2.6
- (9) Dimostrare che nel caso di infiniti lanci di una moneta onesta ogni esito ha probabilità zero di verificarsi
vedi Esempio 2 file di integrazione
- (10) Definire la probabilità condizionata $P(E|F)$ e derivare espressione equivalente per $P(E|F)$ nel caso di spazio di probabilità con esiti equiprobabili.
Ross p.68. Abbiamo provato che, nel caso di spazio di probabilità con esiti equiprobabili, $P(E|F) = |E \cap F|/|F|$.
- (11) Enunciare la legge delle probabilità composte (detta anche "regola del prodotto") e dimostrarla.
Ross, sez. 3.2
- (12) Enunciare la legge della probabilità totale nel caso di partizione di S in n eventi $F_1, F_2, \dots, F_n$ e dimostrarla.
vedi Prop. 5 file integrazione
- (13) Enunciare il Teorema di Bayes e dimostrarlo
vedi Prop. 6 file integrazioni
- (14) Definire l'indipendenza di 2 eventi, l'indipendenza di 3 eventi e l'indipendenza di n eventi.
Ross, sez. 3.4
- (15) Dare esempio di 3 eventi indipendenti a coppie ma non indipendenti, giustificandolo
vedi Prop. 7 file di integrazione
- (16) Specificare la relazione tra la funzione di probabilità e la funzione di probabilità ristretta ad eventi elementari.
Vedi Prop. 4 del file, è richiesto solo l'enunciato, non la dimostrazione
- (17) Modellizzare n prove indipendenti di tipo successo/insuccesso, giustificando la modellizzazione.
vedi sezione 3 del file di integrazione
- (18) Dimostrare che dato un evento F con $P(F) > 0$, la funzione $E \mapsto P(E|F)$ è una funzione di probabilità.
Vedi ross, sez. 3.5
- (19) Dare la definizione di variabile aleatoria, la definizione di variabile aleatoria discreta, la definizione di densità discreta p_X di una v.a. discreta X e la definizione di funzione di distribuzione F_X di una v.a. X . Dimostrare che se X è v.a. discreta e $\{x_i\}_{i \in I}$ è l'insieme dei suoi possibili valori, allora $F_X(a) = \sum_{i: x_i \leq a} p_X(x_i)$.
Vedi ross cap.4
- (20) Definire il valore atteso di una variabile aleatoria discreta X , enunciare la formula per calcolare il valore atteso di $f(X)$ con f funzione reale e dimostrare

tale formula.

Vedi sez. 4.3 e 4.4 del ross, tra cui prop. 4.1

- (21) Definire la varianza e la deviazione standard di una variabile aleatoria. Dare formula equivalente per la $Var(X)$ in termini di $E(X^2)$ e $E(X)$, e dimostrarla.

vedi ross, sez. 4.5 e la formula a fine pagina 150

- (22) Dimostrare che la varianza di una v.a. discreta X è non negativa e che $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$ per qualsiasi costante a, b .

Fatto a lezione, vedi anche sez.4.5 del ross.

- (23) Spiegare l'interpretazione frequentistica del valore atteso.

- (24) Dimostrare la linearità del valore atteso nella forma debole: $E(aX + b) = aE(X) + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Ross, corollario 4.1 del cap.4

- (25) Enunciare una proprietà equivalente alla proprietà $Var(X) = 0$ (non serve dimostrazione).

prop. 9 del file

- (26) Dare formula per il calcolo del valore atteso $E(X)$ di una variabile aleatoria su uno spazio campionario numerabile in termini della probabilità di eventi elementari. Dimostrarla

prop.10 del file

- (27) Dare la definizione di vettore aleatorio (o variabile aleatoria m -dimensionale) e di vettore aleatorio discreto. Definire anche la densità discreta di probabilità di un vettore aleatorio discreto.

sez. 6 del file

- (28) Date variabili aleatorie $X_1, \dots, X_m$ definire la densità congiunta, le densità marginali. Enunciare come si calcolano le densità marginali nota la densità congiunta e dimostrarlo. Mostrare che, note le densità marginali, non si può determinare la densità congiunta.

vedi def.3 e prop. 13 del file

- (29) Dare la definizione di indipendenza di n variabili aleatorie ed enunciare una proprietà equivalente in termini di eventi indipendenti (senza dimostrazione).

sez.7 del file e prop. 14

- (30) Enunciare un criterio per verificare, tramite le densità di probabilità, se delle variabili aleatorie discrete sono indipendenti. Darne la dimostrazione nel caso di 2 variabili aleatorie.

prop.15 del file

- (31) Enunciare la formula per il calcolo del valore atteso di una funzione di vettore aleatorio discreto ($E(f(X_1, \dots, X_m))$).

prop.17 del file

- (32) Enunciare la linearità forte del valore atteso di una combinazione lineare di variabili aleatorie e dimostrarla.

cor.1, pag.15 del file

- (33) Enunciare come si calcola il valore atteso di un prodotto di variabili aleatorie indipendenti in termini dei valori attesi delle singole variabili aleatorie. Dimostrare l'enunciato.

cor.2, pag.16 del file

- (34) Date variabili aleatorie indipendenti $X_1, \dots, X_n$ e funzioni $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, provare che $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sono variabili aleatorie indipendenti.
prop.18 del file
- (35) Definire la covarianza di due variabili aleatorie, specificarne alcune identità di base e dimostrandole.
Def.4 e prop.19 del file
- (36) Specificare la relazione tra indipendenza di due variabili aleatorie e il fatto che le variabili aleatorie abbiano covarianza zero. Dimostrare quanto affermato.
prop.20 del file
- (37) Enunciare come la varianza di una somma di variabili aleatorie si scrive in termini della varianza delle singole variabili aleatorie e delle covarianze a coppie. Dimostrare il tutto.
prop.21 del file
- (38) Enunciare la bilinearità della covarianza e dimostrarla.
prop.22 del file
- (39) Definire la variabile aleatoria di Bernoulli e la variabile aleatoria binomiale. Dare un esempio di variabile aleatoria binomiale dimostrando che l'esempio effettivamente è una variabile aleatoria binomiale.
Def.7, def.8 e prop. 31 pag. 24 del file
- (40) Enunciare il valore del valore atteso e della varianza di una variabile aleatoria binomiale. Dimostrare l'enunciato.
prop. 34 del file
- (41) Definire la variabile aleatoria ipergeometrica ed enunciare come si calcola il valore atteso. Dimostrare l'enunciato.
ross cap.4 , prop.35 del file
- (42) Definizione la variabile aleatoria di Poisson di parametro λ e dimostrazione che il valore atteso è pari a λ .
Ross cap.4
- (43) Enunciare la legge dei piccoli numeri (cioè l'approssimazione della variabile aleatoria binomiale tramite variabile aleatoria di poisson). Dimostrare l'enunciato.
prop.25 del file
- (44) Definire la variabile aleatoria geometrica. Dare un esempio di variabile aleatoria geometrica dimostrando che l'esempio effettivamente è una variabile aleatoria geometrica.
def.9 e prop.32 a pag.25 del file
- (45) Enunciare quanto vale il valore atteso di una variabile aleatoria geometrica. Dimostrare l'enunciato.
Ross, cap.4
- (46) Definire la variabile binomiale negativa. Dare un esempio di variabile binomiale negativa dimostrando che l'esempio effettivamente è una variabile binomiale negativa.
def.10 e prop.33 a pag.25 del file
- (47) Sapendo che una v.a. geometrica di parametro p ha valore atteso $1/p$ e varianza $(1 - p^2)/p$, determinare (dandone la dimostrazione) il valore atteso e la varianza di una variabile aleatoria binomiale negativa di parametri r, p .
ross, cap.4

- (48) Enunciare la proprietà di perdita di memoria di una variabile aleatoria geometrica. Dimostrare l'enunciato.
prop.23 del file
- (49) Enunciare la monotonia del valore atteso. Dimostrare l'enunciato.
prop. 26 file
- (50) Enunciare la disuguaglianza di Markov e dimostrarla. *prop.2.1 del cap.8 del ross*
- (51) Enunciare la disuguaglianza di Markov e la disuguaglianza di Chebyshev. Dimostrare la disuguaglianza di Chebyshev.
prop.2.1 e prop.2.2 del cap.8 del ross
- (52) Specificare cosa si intende per successione di variabili indipendenti e identicamente distribuite. Enunciare la legge debole dei grandi numeri e dimostrarla (assumendo nota la disuguaglianza di Chebyshev).
teorema 2.1 del cap.8 del ross
- (53) Date n variabili aleatorie i.i.d. definirne la media campionaria, dare la formula per il suo valore atteso e la formula per la sua varianza (dimostrando entrambe le formule).
per definizione e valore atteso vedi Esempio 2c del capitolo 7, sez. 7.2, ross. calcolo varianza fatto a lezione
- (54) Enunciare la legge forte dei grandi numeri, enunciare l'interpretazione frequentistica della probabilità nell'approccio assiomatico e dimostrarla.
Teorema 4.1 cap. 8 del ross, e sezione 14 del file
- (55) Dara la definizione di variabile aleatoria continua e di funzione di densità, la definizione di valore atteso e varianza per variabili aleatorie continue ed enunciare la formula per il valore atteso di una funzione di variabile aleatoria continua.
Ross, sezioni 5.1 e 5.2, prop.2.1 per l'ultimo punto
- (56) Definire la variabile aleatoria uniforme, enunciare il suo valore atteso e la sua varianza dando anche la dimostrazione.
Ross, sezione 5.3
- (57) Definire la variabile aleatoria esponenziale, enunciare il suo valore atteso dando anche la dimostrazione.
Ross, sezione 5.5
- (58) Dare la definizione di variabile aleatoria gaussiana (o normale) di media μ e varianza σ^2 e di variabile gaussiana standard. Scriverne la funzione di distribuzione
Ross, sezione 5.4
- (59) Enunciare come si può ottenere tramite trasformazioni affini una variabile gaussiana standard a partire da una generica variabile aleatoria gaussiana e dimostrarlo. Enunciare come si può ottenere tramite trasformazioni affini una variabile gaussiana generica a partire da una gaussiana standard.
Prop. 30 del file
- (60) Enunciare il teorema di De Moivre–Laplace ed enunciare il teorema del limite centrale. Spiegare perché il teorema di De Moivre–Laplace è un caso particolare del teorema del limite centrale.
Sezione 5.4.1. del ross, teorema 3.1 della sez.8.3 del cap.8 del ross