

Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2018/19

Analisi (L.Fanelli, G. Galise, M. Marchi, A. Terracina)

Scheda 10 – 20 dicembre 2018

Esercizio 1. Sia $w = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ e sia $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Scrivere la rappresentazione trigonometrica di w e z e calcolare w^{128} e z^8 .

Esercizio 2. Dato $\lambda \in \mathbb{C}$, sia z_n la successione definita da

$$z_{n+1} = \lambda z_n, \quad z_0 = 1.$$

Dire per quali $\lambda \in \mathbb{C}$ la successione reale $a_n := |z_n|$ è convergente.

Esercizio 3. Sia $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Esplicitare

$$|e^z|, \quad e^i, \quad \overline{e^z} - e^{\bar{z}} \quad \text{e le soluzioni di } z^4 = -1, \quad z^2 = e^{-\frac{i\pi}{2}}.$$

Esercizio 4. Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x \ln^2 x} \\ y(e) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = (x+1)e^{-x} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = (2x+1)\sin(3x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 5. Dati $a, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = a \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' = \sin x \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' = a + \sin x \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

Esercizio 6. Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y' - y = 1 + t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 7. Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni

$$y'' + 3y' - 10y = 0, \quad y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Esercizio 8. Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' + y' + y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Esercizio 9. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' = e^t \sin t, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' - 2y' + 5y = \sin t, \\ y(0) = -1, y'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' + 2y' + y = \sin t + \cos(2t), \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 10. Sia $\varepsilon \in (0, 1)$. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 2\varepsilon y' + y = \sin(t).$$

Si determinino i valori delle condizioni iniziali per le quali la soluzione $y = y(t)$ rimane limitata per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 11. Sia $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq \pm 1$.

i. Trovare la soluzione $y(t; \omega)$ del problema di Cauchy

$$y'' + y = \sin(\omega t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

ii. Calcolare il limite $y_1(t) := \lim_{\omega \rightarrow 1} y(t; \omega)$.

iii. Verificare che y_1 è soluzione del problema di Cauchy

$$y'' + y = \sin(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Esercizio 12. Trovare i valori $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui il problema con condizioni al bordo

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

ammette soluzioni diverse dalla soluzione nulla.

Esercizio 13. ☺ Siano $a > 0$ e $f \in C(\mathbb{R})$ tale che $f(t) \geq 0$ per ogni t e $f(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$.

Determinare il limite per $t \rightarrow +\infty$ della soluzione $y = y(t)$ del problema di Cauchy

$$y' + ay = f(t), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}.$$