Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2018/19

Analisi (L.Fanelli, G. Galise, M. Marchi, A. Terracina)

Scheda 2 – 6 ottobre 2018

Esercizio 1. Determinare l'insieme di definizione delle funzioni seguenti

$$\frac{2x^2-3}{x^4-5x^2+4}, \qquad \frac{3x^2+2}{x^4-4x^2+5}, \qquad \frac{10^x}{2\sin x-1}, \qquad \frac{10^x-100}{\sin x+2}, \qquad \frac{1}{|x+2|\sqrt{x^2+2x-15}},$$

$$\cos(\pi x^2), \qquad \tan(\pi x^2), \qquad \sqrt{12+2^x-4^x}.$$

Determinare gli eventuali punti in cui le funzioni si annullano.

Esercizio 2. Disegnare i grafici delle funzioni seguenti

$$f(x)=|x-3|+1, \qquad g(x)=1+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right), \qquad h(x)=|3-4x-x^2|.$$

Esercizio 3. Scrivere la funzione composta $h=f\circ g$ e $k=g\circ f$ nei seguenti casi:

(i) $f(x)=x+1\,, \qquad g(x)=x^2-2x;$

(ii) $f(x)=x^2\,, \qquad g(x)=\sqrt{x}\,, \quad x\geq 0.$

Esercizio 4. Data la funzione $f(x)=x^3$, disegnare il grafico di

$$f_0(x)=f(x)+1, \qquad f_1(x)=f(x)-1, \qquad f_2(x)=f(x+2), \qquad f_3(x)=f(x-2), \qquad f_4(x)=3\,f(x),$$

$$f_5(x)=f(3x), \qquad f_6(x)=f_0(-x) \qquad f_7(x)=-f_0(x), \qquad f_8(x)=|f_0(x)|, \qquad f_9(x)=f_0(|x|).$$

[Osservare che le ultime 4 funzioni dipendono da f_0 e non da f].

Esercizio 5. Sia $f(x)=\sqrt[3]{x+1}-2$. Dopo aver dimostrato che è invertibile determinare esplicitamente la funzione inversa.

Esercizio 6. Mostrare **usando la definizione** la validità di

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n^2+3n}=0, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}=1.$$

Esercizio 7. Calcolare, se esiste, il limite delle seguenti successioni

$$\frac{3n^3+2n+1}{4n^4+3n^3+2}, \qquad (-1)^n+2, \qquad n+(-1)^n, \qquad \frac{n^2+n\,\sin(n)}{2n^2+3n+1}, \qquad \frac{3^n+n}{n^3+1},$$

$$n^2\,2^{-n}, \qquad \frac{3^n}{2^n+4^n}, \qquad \frac{1+\cos^2(1+n^2)}{n^2}, \qquad \frac{3^n}{n^{100}}, \qquad \frac{4n^4-n^3+4n^2}{2n^4+3},$$

$$\frac{3^n+n}{4^n+n^2\,\sin(n)}, \qquad \frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n}, \qquad \frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2+1}{n}, \qquad \sqrt{n^2+n}-n$$

$$\frac{3^n-n^2}{2^n+n^5}, \qquad \frac{\ln n-2^n+\sin(n)}{n^3-n!}, \qquad \sqrt[n]{\frac{n+3}{n}}, \qquad \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$\sin\left(\frac{n+2}{2n^2+7}\right), \qquad \tan\left(\frac{3n+1}{n^2+6}\right), \qquad \frac{\cos(n+1)\,\sin(1/n)}{n^3+n}, \qquad \frac{\sqrt{n^2-n+1}-2n}{n+1},$$

Esercizio 8. Sia a_n una successione limitata di numeri reali, con $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dire se esistono i seguenti limiti, motivando le risposte con esempi e controesempi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n+1}, \qquad \lim_{n\to+\infty} na_n, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{na_n+1}{n^2+2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{a_n}.$$

Esercizio 9. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della successione

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n^\alpha+2}$$

Esercizio 10. Sia $\{a_n\}$ la successione definita da

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n} \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

1) Calcolare a_2, a_3 e a_4.

2) Dimostrare che la successione è monotona.

3)Dimostrare che per ogni n, $a_{2n} - a_n \geq \frac{1}{2}$

4)Dedurre che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

Esercizio 11. ☹ Sia $a_n = \sin n$. Dimostrare che la successione non è monotona ed è limitata. Dimostrare che non esiste il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n$ non esiste. Dimostrare esiste una sotto soluzione convergente a 1.

Esercizio 12. 1)Dimostrare che se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l > 1$ allora definitivamente la successione è strettamente maggiore di 1.

2) Costruire una successione a_n che converge a 1 con infiniti termini strettamente maggiori di 1 e infiniti termini strettamente minori di 1.