

Esercizio 1. Calcolare, se esiste, il limite delle seguenti successioni

$$\frac{n^3 + 2n + 1}{5 + 2n^3}, \quad (n^2 + n + 1)^{\frac{1}{2}} - (n^2 + 2n + 3)^{\frac{1}{2}}, \quad (-1)^n + (-1)^{n+1}, \quad \cos(\pi n) + (-1)^n$$

Esercizio 2. Calcolare, se esiste, il limite della seguente successione

$$\frac{2^{3n} + 49^{n/2}}{1 + 2^n - 32^{\frac{3}{5}n}}$$

Esercizio 3. Dati $A, B \in \mathbb{R}$, sia $a_n := n^2 + A n + B$. Per quali scelte di A e B , la successione a_n è monotona? Per quali scelte di A e B , la successione a_n è definitivamente monotona?

Esercizio 4. Dimostrare che, se $a_n \rightarrow a$ e $b_n \rightarrow b$, con $a \neq b$, allora $\min\{a_n, b_n\} \rightarrow \min\{a, b\}$.

Esercizio 5. Sia a_n la successione definita per ricorrenza nel seguente modo:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2 a_n + 1.$$

- i. Dimostrare per induzione che la successione è a termini positivi ed è strettamente crescente;
- ii. dimostrare che la successione a_n è divergente;
- iii. determinare la forma esplicita di a_n .

Esercizio 6. Sia a_n la successione definita per ricorrenza nel seguente modo:

$$a_0 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right).$$

- i. dimostrare che la successione è a termini positivi;
- ii. mostrare che la successione è monotona decrescente;
- iii. calcolare il limite di a_n per $n \rightarrow +\infty$.

Esercizio 7. Dimostrare che¹:

- i. $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$, $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
- ii. se $a_n \rightarrow \ell$ per $n \rightarrow +\infty$, allora $\sin(a_n) \rightarrow \sin(\ell)$ e $\cos(a_n) \rightarrow \cos(\ell)$ per $n \rightarrow +\infty$.

¹**suggerimento:** utilizzare le formule di prostaferesi