Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2018/19

Analisi (L.Fanelli, G. Galise, M.V. Marchi, A. Terracina)

Scheda 4 – 17 ottobre 2018

Esercizio 1. Dire se le seguenti serie convergono e, in caso affermativo, calcolarne la somma

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} 3^n \qquad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(1-n)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+(-1)^n\, 2^n}{6^n}$$

Esercizio 2. Dire se esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n=N}^{+\infty} 3^n < +\infty.$$

Esercizio 3. Siano $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ convergenti, con $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ per ogni n. Dimostrare che

$$\sum_n a_n b_n < +\infty$$

Esercizio 4. Trovare due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ convergenti, con $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ per ogni n, e tali che

$$\sum_n a_n b_n < \left(\sum_n a_n\right)\left(\sum_n b_n\right).$$

Esercizio 5. Sia $a_n \geq 0$ per ogni n. Dire se é vero che $\sum_n (a_n)^2$ convergente $\Rightarrow \sum_n a_n$ convergente.

Esercizio 6. **i.** Dimostrare la disuguaglianza

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

ii. Utilizzando **i.**, dimostrare che se le serie $\sum_n (a_n)^2$ e $\sum_n (b_n)^2$ sono convergenti, allora anche la serie $\sum_n a_n b_n$ è convergente.

Esercizio 7. Discutere il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{4^n+n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n+n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2+n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3n+8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n^2+n)^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+n^3}{2^n+n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\tan(\frac{1}{n^2}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2}.$$

Esercizio 8. Date $\{a_n\}$ una successione infinitesima e $\sum_n b_n$ una serie assolutamente convergente, provare che la serie $\sum_n a_n b_n$ è una serie convergente.

Esercizio 9. Studiare la convergenza assoluta delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n + 1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2) \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n}$$

Tali serie convergono semplicemente?

Esercizio 10. Sia $\{a_k\}$ una successione. Supponiamo che $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$ e che $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| = +\infty$. Allora necessariamente si ha $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^+ = +\infty$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^- = +\infty$.

Esercizio 11. Trovare due successioni a_n, b_n, con $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \min\{a_n, b_n\} < +\infty.$$

Esercizio 12. ☹ Trovare due successioni decrescenti a_n, b_n, con $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \min\{a_n, b_n\} < +\infty.$$