Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2018/19

Analisi (L.Fanelli, G. Galise, M.Marchi, A. Terracina)

Scheda 5 – 24 ottobre 2018

Esercizio 1. Determinare l'insieme di definizione e l'insieme di continuità delle funzioni

$$\sqrt{x^3 - x^2}, \qquad x\,\mathrm{sgn}(\cos x), \qquad \sin(2\pi \mathrm{sgn}(x)), \qquad \sqrt{1 - 2\cos x},$$

dove

$$\mathrm{sgn}(x) := \begin{cases} x/|x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2. In ciascuno dei casi seguenti, dire se è possibile determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la corrispondente funzione sia continua in $x = 0$

$$f(x) := \begin{cases} 2x + x^2 + 6 & x < 0 \\ a(x-2) & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) := \begin{cases} \cos(e^{-1/x^2}) & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}, \quad h(x) := \begin{cases} \arctan(1/x) & x \neq 0 \\ a & x = 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 3. Calcolare, o stabilire se non esistono, i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{3x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{(\sin x)^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x\sqrt{|x|}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{\sin(2x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \Big(\tan x\Big)^2\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big),$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \cos(x)\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x(1+x^2)}{1+4^x}\,, \qquad \lim_{x\to 0} H(x)\,,$$

dove definiamo

$$H(x) := \begin{cases} 0\,, & x < 0\,, \\ 1\,, & x > 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 4. Calcolare, se esistono, i limiti delle seguenti funzioni, sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$

$$\frac{x^3+x^2}{2x^3-x}, \qquad \sqrt{x^2-3x} - x, \qquad \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}, \qquad \ln(2x^2+1) - \ln(x^2+3)\,, \qquad \frac{3^x - 2^{2x+1}}{2^{2x-2}-1}.$$

Esercizio 5. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty} x^x, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{3^x + 10x^7}, \qquad \lim_{x\to 0^+} x\log x\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^x, \qquad \lim_{x\to -\infty} x\,e^x = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x^2})^x\,,$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)-1}{x-1}, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{x}\sin\frac{1}{x}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{1-\cos x}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)\log(1+x)}{x(1-\cos x)}\,.$$

Esercizio 6. Siano $f, g, z : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tre funzioni continue e poniamo: $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ e $k(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Mostrare che

i. $|z(x)|$ è continua;

ii. $h(x) + k(x) = f(x) + g(x), \quad h(x) - k(x) = |f(x) - g(x)|$;

iii. dedurre che $h(x)$ e $k(x)$ sono continue. Interpretare graficamente il risultato.

Esercizio 7. Sia $f(x) = x(x - e^{-x})$.

i. Dimostrare che l'equazione $f(x) = 1$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[0, 2]$.

ii. Dimostrare che l'equazione $f(x) = 1$ ammette almeno due soluzioni in $\mathbb{R}$.

Esercizio 8. Si determini l'immagine delle seguenti funzioni

$$\arctan(e^x) \qquad \text{per} \quad x \in (-1, 2], \qquad\qquad e^{|x-1|} \qquad \text{per} \quad x \in (-1, 2].$$

Si dica se si tratta di funzioni iniettive e, in caso non lo siano, trovare una restrizione invertibile.

Esercizio 9. ☹ **i.** Sia $p(x)$ un polinomio di grado pari con coefficiente di grado massimo positivo (risp. negativo). Mostrare che $p(x)$ ha minimo (risp. massimo);
ii. Cosa possiamo dire se il polinomio $p(x)$ ha grado dispari?

Esercizio 10. Sia $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua e tale che

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

i. Dare esempi di funzioni f che soddisfano le ipotesi, ma non ammettono minimo.
ii. ☹ Dimostrare che, se esiste $x_0 > a$ tale che $f(x_0) < \ell$, allora la funzione f ammette minimo.

Esercizio 11. Sia $f : I \to I$ continua in $I = [a, b]$. Dimostrare che esiste un $\bar{x} \in I$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Un punto che verifica questa equazione si chiama "*punto fisso*" per f. Fare un esempio in cui x non è unico.

[*Suggerimento: applicare il teorema di esistenza degli zeri alla funzione* $f(x) - x$.]

Esercizio 12. Sia $f : I \to I$ continua in $I = [a, b]$. Dimostrare che se $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$ per ogni $x_1,\ x_2 \in I,\ x_1 \neq x_2$, allora **esiste un unico** $\bar{x} \in I$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Esercizio 13. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, tale che

$$f(x) = 3 - 2x^2, \qquad \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1].$$

Calcolare $f(\frac{\pi}{4})$ ed $f(\frac{\pi}{8})$.

Esercizio 14. ☹ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Dimostrare che l'insieme dei punti di discontinuità di f è al più numerabile.