

Esercizio 1. Utilizzando le regole di derivazione, calcolare nell'insieme dove è possibile la derivata di

$$x^3(1+x^2)(1-x^2), \quad \frac{x+1}{x^2+1}, \quad \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}, \quad e^x(\sin x + \cos x), \quad \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad e^{\sqrt{x}}$$

$$\frac{1+\cos^2 x}{2\sin x}, \quad \frac{\arcsin x}{1-x^2}, \quad x^\alpha \ln x, \quad x \arctan x, \quad \sin(\sqrt{x^2+1}), \quad \ln(1+e^{x^2}).$$

Esercizio 2. Dire quale delle seguenti funzioni è derivabile in $x = 0$

$$|x| \sin x, \quad |x|(x^2+1), \quad x \sin(|x|), \quad \sqrt{x} \sin x, \quad (x^2+1)\sqrt{x}, \quad |x|^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad .$$

Esercizio 3. Studiare la derivabilità della funzione $\log(|x|)$ nel suo dominio e calcolarne la derivata.

Più in generale, sia $f(x)$ una funzione derivabile in un intervallo. Studiare continuità e derivabilità della funzione $\log(|f(x)|)$ nel suo dominio naturale e calcolarne la derivata.

Esercizio 4. Sia

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

Dire se la funzione f è continua ed è derivabile in \mathbb{R} . Ripetere l'esercizio per la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

La derivata di g è continua in \mathbb{R} ? È derivabile in \mathbb{R} la funzione $h(x) = |x|^\alpha \sin(1/x)$, se $x \neq 0$, $h(0) = 0$, se $\alpha \in (1, 2)$?

Esercizio 5. Sia $f(x) = \sqrt{1+4x^2}$ definita in $x \in \mathbb{R}$.

- i. Determinare l'insieme dei punti di derivabilità della funzione f .
- ii. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nei punti $(1, f(1))$ e $(-2, f(-2))$.
- iii. Trovata l'equazione della retta tangente in un punto generico $(x_0, f(x_0))$, dire per quali valori x_0 la tangente è orizzontale e per quali è parallela ad una delle bisettrici $y = x$ e $y = -x$.

Esercizio 6. Nei seguenti casi, dire se la funzione è continua e se è derivabile in $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ e^x - 1 & x \geq 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1-x & x < 0 \\ \frac{1-x}{1+x^2} & x \geq 0, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ e^{-x^2/2} & x \geq 0, \end{cases}$$

Esercizio 7. Mostrare che la funzione $f(x) = 3x + \arctan x + 1$ è iniettiva. Calcolare il dominio dell'inversa e la derivata dell'inversa in 1.

Esercizio 8. Dire se esiste il massimo (minimo) della funzione $f(x) = \ln(2 + \cos^2 x)$ nell'intervallo $[4, 5]$ e, in caso affermativo, si dica se è positivo, negativo o nullo. Cosa si può dire in \mathbb{R} ?

Esercizio 9. Dire se l'equazione $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 30x + 8 = 0$ ha una soluzione $x_0 \in (0, 1)$. Esiste anche una soluzione negativa? Ne esiste una $x_1 > x_0$?

Esercizio 10. Data la funzione $f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$ dire se l'equazione $f(x) = \lambda$ ha soluzioni e quante, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esercizio 11. Usando il Teorema di Lagrange, dimostrare che

$$|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

$$|e^x - e^y| \leq 3|x - y| \quad x, y \in (-1, 1),$$

$$|e^{-x^2} - e^{-y^2}| \leq |x - y| \quad x, y \in \mathbb{R}.$$