Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2018/19

**Analisi** (L.Fanelli, G. Galise, M. Marchi, A. Terracina)

Scheda 7 – 29 novembre 2018

Esercizio 1. Sia $f$ una qualsiasi funzione definita in un intervallo aperto $I$. Si assuma che per ogni $x_0 \in I$, $f(x) - f(x_0)$ sia un infinitesimo superiore a $x - x_0$ per $x \to x_0$. Si deduca la forma della funzione.

Esercizio 2. Si provi che l'equazione

$$2\,x^2 = x\,e^{-x}$$

ammette una ed una sola soluzione positiva in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x < 0 \\ \frac{1}{arctgx} - \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

a. provare che è prolungabile con continuità in 0;

b. determinare il minimo assoluto della funzione prolungata in $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. Si studino i grafici delle funzioni

$$f(x) = \frac{\log x}{1 + |\log x|}, \qquad g(x) = \log\left(\frac{x^2 - 4}{x + 3}\right)$$

Esercizio 5. Data la funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$$

se ne determinino estremo superiore ed inferiore nell'intervallo $(-1, +\infty)$ precisando se sono massimi e/o minimi, in caso affermativo si determinino anche i punti di massimo e minimo.

Esercizio 6. Fra tutti i rettangoli di perimetro fissato, caratterizzare, se esistono, quelli la cui diagonale Ë di lunghezza minima.

Esercizio 7. Sia

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + x}.$$

Si consideri un intervallo $I = \left[\frac{1}{4}, a\right]$, per $a > \frac{1}{4}$. Si determini $a$ in modo che sia applicabile a $I$ il Teorema di Rolle, e si trovino i corrispondenti punti $\xi$ di cui il teorema afferma l'esistenza.

Esercizio 8. Sia $f$ un funzione derivabile in $(0, +\infty)$ e continua in 0. Si supponga che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0).$$

Si provi che esiste $\xi \in (0, +\infty)$ tale che $f'(\xi) = 0$.

Esercizio 9. Si calcoli tramite lo sviluppo di Taylor

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{e^{x^2} - e^{x^3}}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x) - x}{x^2}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{x + \tan x}.$$

Esercizio 10. Si studi continuità e derivabilità al variare dei parametri reali $a$ e $b$ di

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(2x)}{x} & \text{per } x < 0 \\ e^x\,(a\,x+b) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{per } |x| > 1 \\ a\,x^2+b & \text{per } |x| \leq 1 \end{cases}$$

Esercizio 11. Dimostrare che vale

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

per ogni $x > 1$.

**Suggerimento.** Si usi la formula di Taylor con resto di Lagrange

Esercizio 12. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Studiare al variare del parametro tutti gli asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{e^{\alpha x} + x}{e^x - 1}$$

Esercizio 13. ☹ Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.

(a) dimostrare che $f$ è continua in $(a, b)$

(b) dimostrare che, se $f$ è derivabile, allora $f'$ è continua in $(a, b)$

Trovare inoltre un esempio di funzione convessa $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, derivabile due volte in $(a, b)$, con $f''$ che non è continua in tutto $(a, b)$.

**Suggerimento.** Per il punto (a), usare la disuguaglianza

$$x < z < y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

Per il punto (b), osservare che la derivata di una funzione convessa è crescente e caratterizzarne, quindi, le possibili discontinuità.