Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2018/19

Analisi (L.Fanelli, G. Galise, M. Marchi, A. Terracina)

Scheda 8 – 7 dicembre 2018

Esercizio 1. Usare la formula di de l'Hôpital o gli sviluppi di Taylor per calcolare i limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-\cos(x)}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{3x^2}}{x\sin(2x)}, \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right), \qquad \lim_{x\to +\infty} x^3\left\{\frac{1}{x}-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos(2x)}{\sin^2 x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - e^x + 1}{x\,e^x - \sin x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \arctan x}{1-\cos x}$$

Esercizio 2. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine n in x_0 delle seguenti funzioni

i. $f(x) = x - \sin x, \quad x_0 = 0,\ n = 5,$ **ii.** $f(x) = e^{x-1} - \cos(2\pi x), \quad x_0 = 1,\ n = 4,$

iii. $f(x) = x \arctan x, \quad x_0 = 0,\ n = 2,$ **iv.** $f(x) = \dfrac{1}{1-x}, \quad x_0 = 2,\ n = 2,$

v. $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad x_0 = 0,\ n = 3,$ **vi.** $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad x_0 = 2,\ n = 3$

vii. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x_0 = 1,\ n = 3,$ **viii.** $f(x) = x^4 + x - 2, \quad x_0 = 1,\ n = 4$

Esercizio 3. Determinare a, b, c tali che

$$e^x = \frac{a+b\,x}{1+c\,x} + o(x^2) \qquad \text{per} \quad x \to 0.$$

Esercizio 4. **i.** Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 in 0 della funzione $\dfrac{1}{1-x}$.

ii. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 in 0 della funzione $\dfrac{1}{1-f(x)}$ nei casi seguenti

$$f(x) = x + \varepsilon x^2 \quad (\varepsilon \in \mathbb{R}), \qquad f(x) = x\,e^x, \qquad f(x) = \sin x.$$

iii. Data una funzione $f = f(x)$ derivabile due volte e tale che $f(0) = 0$, scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 in 0 della funzione $\dfrac{1}{1-f(x)}$.

Esercizio 5. Usando la definizione di integrale, si dimostri la catena di disuguaglianze

$$2 \le \int_{-1}^{1} \frac{2}{1+x^2}\,dx \le 4.$$

Sapete proporre stime più precise per il valore dell'integrale proposto?

Esercizio 6. Indicata con χ_I la funzione caratteristica dell'insieme I, siano

$$\phi := \chi_{[0,1/2)} - 2\chi_{[1/2,1]}, \qquad \psi := 3\chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/3,2/3]} + 2\chi_{[2/3,1]}, \qquad \theta := \phi + \psi.$$

i. Calcolare l'integrale definito di ϕ e quello di ψ in $[0, 1]$.

ii. Calcolare, a partire dalla definizione, l'integrale definito di θ in $[0, 1]$.

iii. Verificare la validità della relazione

$$\int_0^1 \phi(x)\,dx + \int_0^1 \psi(x)\,dx = \int_0^1 \theta(x)\,dx.$$

Esercizio 7. **i.** Dimostrare, usando la definizione di integrale, che

$$\int_a^b f(x+\delta)\,dx = \int_{a+\delta}^{b+\delta} f(x)\,dx \qquad \forall\,\delta\in\mathbb{R}.$$

ii. Dimostrare, usando la definizione di integrale, che

$$\int_0^b f(\lambda\,x)\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda\,b} f(x)\,dx \qquad \forall\,\lambda>0, \quad \forall\,b>0.$$

Esercizio 8. Discutere l'esistenza di soluzioni per la seguente equazione

$$x^2 + x\left(\int_0^2 e^{-t^2}dt\right) + 1 = 0.$$

Dire se existe $a\in\mathbb{R}$ tale che

$$x^2 + x\left(\int_0^a e^{-t^2}dt\right) + 1 = 0$$

ha sicuramente due soluzioni.

Esercizio 9. Sia $f(x) = a^{[x]}$ con $a\in(0,1)$. Calcolare $a_n = \int_0^n a^{[x]}dx$. Determinare $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Esercizio 10. Sia $f\geq 0$ una funzione continua in $[0,1]$ tale che esiste $x_o\in(0,1)$ tale che $f(x_o)>1$. Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f^n(x)dx = +\infty.$$

Esercizio 11. **i.** Data la funzione podio

$$f(x) := \begin{cases} 2 & x\in[0,1), \\ 3 & x\in[1,2), \\ 1 & x\in[2,3], \end{cases}$$

si determini l'insieme di continuità e l'insieme di derivabilità della funzione

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt \qquad x\in[0,3].$$

ii. Data una successione reale a_n, sia f una funzione tale che $f(x) = a_n$ per $x\in[n,n+1)$. si determini l'insieme di continuità e l'insieme di derivabilità della funzione

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt \qquad x\in[0,+\infty).$$

Sotto quali ipotesi sulla successione a_n, la funzione F tende ad un limite finito per $x\to+\infty$?

Esercizio 12. Sia f una funzione tale che $f(x+1) = f(x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. Fissato $a\in\mathbb{R}$, dimostrare che la funzione

$$F(x) := \int_{a+x}^{a+1+x} f(t)\,dt$$

è costante.

Esercizio 13. ☹

i Sia f una funzione a scala (cioè costante a tratti) a valori non negativi. Dimostrare che

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2\,dx.$$

ii. Dimostrare che la stessa disuguaglianza vale per una qualsiasi funzione a valori non negativi in $[0,1]$ e integrabile.