Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2018/19

Analisi (L.Fanelli, G. Galise, M. Marchi, A. Terracina)

Scheda 9 – 13 dicembre 2018

Esercizio 1. Si studi il grafico della funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{|s|}{1+|s|}\,ds \qquad x \in \mathbb{R}$$

Successivamente, si provi che F è lipschitziana, dispari e che non è derivabile due volte in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. Determinare le derivate delle seguenti funzioni

$$F(x) = \int_x^3 e^{-t^2}\,dt, \qquad G(x) = \cos(x)\int_{-4}^x e^{-t^2}\,dt, \qquad H(x) = \left(\int_1^x e^{-t^2}\,dt\right)\left(\int_0^x \cos(t^3)\,dt\right)$$

Esercizio 3. Si determini il polinomio di Taylor di ordine 4 centrato nel punto 0 della funzione integrale

$$\Phi(x) := \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt.$$

Quanto vale il polinomio di ordine 8 centrato nel punto 0 della stessa funzione?

Esercizio 4. Dimostrare che la funzione

$$F(x) := \int_{-1}^x f(t)\,dt \qquad \text{dove} \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x<0, \\ e^x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e determinarne una rappresentazione esplicita.

Verificare che F è derivabile due volte e convessa in $\mathbb{R}$.

Esercizio 5. Data $f(x) = \min\{3 - |2x-3|, 2\}$, ricavare una espressione esplicita per la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,ds, \ \text{per } x \in [0,3].$$

Esercizio 6. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ funzione continua, $g, h : [0,1] \to [0,1]$ derivabili. Si provi che la seguente funzione integrale è derivabile e si calcoli la sua derivata

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(s)\,ds.$$

Esercizio 7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione continua e dispari.

i. Dimostrare che, per ogni $a > 0$, si ha

$$\int_{-a}^a f(s)\,ds = 0.$$

ii. Dimostrare che, se $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$, allora $\displaystyle\int_{-a}^{a+1} f(s)\,ds$ tende a zero per $a \to +\infty$.

iii. Trovare degli esempi di funzioni dispari f, con $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$, tali che $\displaystyle\int_{-a}^{2a} f(s)\,ds$ diverge a $+\infty$ per $a \to +\infty$.

Esercizio 8. Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\int \left(e^{3x} - (x-2)^4\right) dx, \quad \int \left(\sqrt{x+3} - \frac{1}{x}\right) dx, \quad \int \frac{3}{1+2x^2}\, dx.$$

Esercizio 9. Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\int_0^1 \left(x^4 + 5x^3 + 1\right) dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\, dx, \qquad \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx,$$

$$\int_0^2 e^{-2x}\, dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^2+4}\, dx \qquad \int_{-2}^{-1} \frac{2x+1}{(x-1)^2}\, dx$$

Esercizio 10. Calcolare l'area della regione

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}.$$

Esercizio 11. Calcolare

$$\int \tan(x)\, dx \qquad \int e^{5-2x}\, dx \qquad \int \frac{x}{(4x^2+1)^5}\, dx \qquad \int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$$

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx \qquad \int \frac{\cos(x)}{4+\sin(x)} dx \qquad \int_0^{\pi} \sin^3(x)\, dx \qquad \int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$$

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\log(x)} \qquad \int x^2 \sin(x)\, dx \qquad \int \arctan x\, dx \qquad \int e^x \sin(x)\, dx$$

$$\int_1^2 x\log^2(x)\, dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\, dx \qquad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx \qquad \int_1^2 \frac{\log(x)}{x^3}\, dx.$$

Esercizio 12. Calcolare

$$\int_0^{2\pi} e^{-x} |\sin x|\, dx, \qquad \int_0^2 \min\{t, t^{-1}\}\, dt, \qquad \int_0^{\pi} [1 + 2\sin(x)]\, dx$$

dove, nell'ultimo integrale, $[\cdot]$ indica la funzione parte intera.

Esercizio 13. ☹ Sia $f\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}$ continua tale che $f(x) \ge 0$ per ogni x e $\int_0^1 f(t)\, dt = 1$.

i. Dimostrare che esiste $x \in [0, 1/2]$ tale che

$$\int_x^{x+1/2} f(t)\, dt = \frac{1}{2}$$

ii. Dimostrare che esiste $x \in [0, 1-1/n]$ tale che

$$\int_x^{x+1/n} f(t)\, dt = \frac{1}{n}$$