

Nome .....

Matricola .....

**ALGEBRA 1**

a.a. 2017/18

prof. V. Barucci, E. Spinelli, D. Fiorenza

Prova scritta — 8 febbraio 2018

Tempo a disposizione per lo svolgimento della prova: 2 ore e mezza.

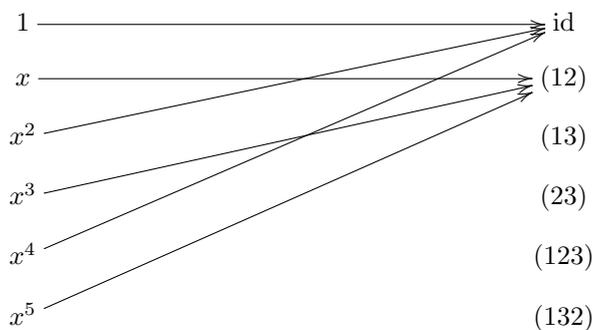
1. Si consideri, al variare del parametro  $a \in \mathbb{Z}$  il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 4X \equiv a \pmod{8} \\ 3X \equiv 2 \pmod{5}. \end{cases}$$

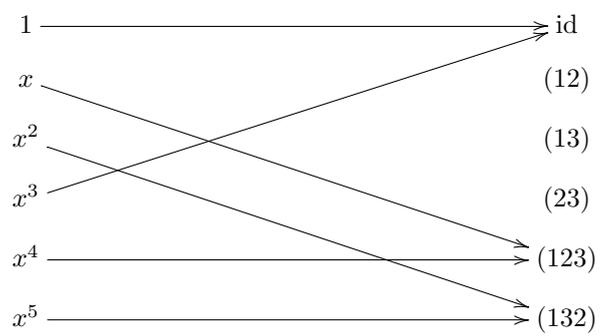
- Il sistema ha soluzione per  $a = 3$ ? sì  no . Se sì, la soluzione in questo caso è  $X \equiv \dots \pmod{\dots}$
- Il sistema ha soluzione per  $a = 4$ ? sì  no . Se sì, la soluzione in questo caso è  $X \equiv 9 \pmod{10}$
- Per quali valori del parametro  $a \in \mathbb{Z}$  il sistema di congruenze dato ha soluzione?  
Il sistema ha soluzione per  $a \equiv 0 \pmod{4}$

2. Esibire, se possibile, un omomorfismo non banale da  $C_6$  a  $S_3$  indicando mediante frecce l'immagine di ogni elemento.

Ci sono varie soluzioni possibili. Ad esempio



oppure



Quanti sono gli omomorfismi da  $C_6$  in  $S_3$  (compreso l'omomorfismo banale)? 6.

3. Sia  $A$  l'anello commutativo  $A = \mathbb{Z}[x]/(x^2 - 2, 7)$ .

- $A$  è un campo? sì  no
- $A$  ammette divisori dello zero? sì  no
- se sì, una coppia di divisori dello zero è:  $[x - 3], [x + 3]$
- $A$  ammette ideali non banali? sì  no
- se sì, un ideale non banale è:  $([x - 3])$ .

4. Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $E_n$  il campo di spezzamento di  $x^n - 1$  su  $\mathbb{Q}$ .

- esistono valori di  $n$  per i quali  $[E_n : \mathbb{Q}] = 2$ ? se sì, quali? sì, sono  $n = 3, n = 4$  ed  $n = 6$ .
- esistono valori di  $n$  per i quali  $[E_n : \mathbb{Q}] = 3$ ? se sì, quali? non esistono.
- esistono valori di  $n$  per i quali  $[E_n : \mathbb{Q}] = n - 1$ ? se sì, quali? sì, sono tutti e soli gli  $n$  che sono numeri primi.

5. Trovare per ognuno dei seguenti elementi di  $\mathbb{Z}[i]$  la fattorizzazione in fattori irriducibili:

$$17 = (4 + i)(4 - i)$$

$$25i = (2 + i)^2(2 - i)^2i$$

$$5 + 2i = 5 + 2i$$

$$7 + 6i = (4 + i)(2 + i)$$