

Nome Cognome Matricola

ALGEBRA 1

a.a. 2017/18

prof. V. Barucci, D. Fiorenza, E. Spinelli

Prova scritta dell'11 luglio 2018 (12 CFU)

Tempo a disposizione per lo svolgimento della prova: 2 ore e mezza.

Notazioni. In tutto il testo, con \mathbb{Z}_m si intende l'anello delle classi resto degli interi modulo m ; un'altra notazione comunemente usata per questo anello è $\mathbb{Z}/(m)$. Nel caso in cui m sia un numero primo p , si scrive anche \mathbb{F}_p per \mathbb{Z}_p .

1. Trovare il più piccolo intero positivo congruo a 2173^{2019} modulo 100.

...

2. Nel gruppo simmetrico S_7 si consideri la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

La permutazione σ è: pari dispari

Una decomposizione in cicli disgiunti di σ è:

L'ordine della permutazione σ è: ...

La cardinalità della classe di coniugio di σ in S_7 è:

3. Sia G un gruppo abeliano finito e sia $f : G \rightarrow G$ l'omomorfismo che manda ogni elemento nel proprio quadrato. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere, provandole nel caso siano vere o negandole esibendo un controesempio nel caso siano false:

G è di ordine pari $\Rightarrow f$ è un automorfismo

f è un automorfismo $\Rightarrow G$ è di ordine pari

G è di ordine dispari $\Rightarrow f$ è un automorfismo

f è un automorfismo $\Rightarrow G$ è di ordine dispari

4. Sia E il campo di spezzamento su \mathbb{Z}_3 di

$$f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1$$

Determinare il grado dell'estensione E

$$[E : \mathbb{Z}_3] = \dots$$

Chiamata α una radice di $f(x)$, $\alpha \notin \mathbb{Z}_3$, una base di E come spazio vettoriale su \mathbb{Z}_3 è:

...

Le radici di $f(x)$ in E sono:

...

5. Sia ζ una radice primitiva terza dell'unità. Trovare per ognuno dei seguenti elementi il corrispondente polinomio minimo su \mathbb{Q} e il grado di algebricità su \mathbb{Q} :

ζ

ζ^{-1}

$\zeta + \sqrt{3}$

$\zeta\sqrt{3}$