ALGEBRA 1
a.a. 2017/18
prof. V. Barucci, E. Spinelli, D. Fiorenza

Seconda prova di esonero — 18 gennaio 2018

Tempo a disposizione per lo svolgimento della prova: 2 ore e mezza.

1. Sia $(A, +, \cdot)$ l'anello delle matrici 2 per 2 della forma
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$
con $a, b \in \mathbb{Z}$, con le usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

(a) A è un anello commutativo? sì ☑ no ☐
Infatti, poiché la moltiplicazione di interi è commutativa, si ha
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ 0 & a_1a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

(b) A è un dominio di integrità? sì ☐ no ☑
Ad esempio si ha
$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ma
$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Il sottoinsieme
$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq A$$
è un ideale (bilatero) di A? sì ☑ no ☐
Il modo migliore di vederlo è probabilmente notare che l'applicazione $f\colon A \to \mathbb{Z}$ definita da
$$f\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = a$$
è un omomorfismo di anelli con nucleo I. Ma lo si può dimostrare facilmente anche con la semplice definizione di ideale bilatero.

è un ideale primo? sì ☑ no ☐
L'omomorfismo $f\colon A \to \mathbb{Z}$ del punto precedente è un omomorfismo suriettivo e dunque $A/I \cong \mathbb{Z}$, che è un dominio di integrità.

è un ideale massimale? sì ☐ no ☑
Si ha infatti $A/I \cong \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ non è un campo.

2. Sia E il campo di spezzamento di $x^9 - x$ su $\mathbb{Q}$. Determinare $[E : \mathbb{Q}]$, trovare $\alpha \in E$ tale che $E = \mathbb{Q}(\alpha)$ ed esibire una base di E su $\mathbb{Q}$.

   $[E : \mathbb{Q}]$=4 $\quad\quad \alpha = e^{\pi i/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad\quad$ base di E su $\mathbb{Q} = \{1, e^{\pi i/4}, i, e^{3\pi i/4}\}$.
   Infatti $x^9 - x = x(x^8 - 1)$ per cui le radici di $x^9 - x$ sono 0 e le radici ottave dell'unità. Dato che 0 sta già in $\mathbb{Q}$, per ottenere E dobbiamo aggiungere solo le radici ottave dell'unità, e dato che queste sono generate dalla radice ottava primitiva $\epsilon = e^{\pi i/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ basta aggiungere ϵ. Si ha cioè $E = \mathbb{Q}(\epsilon)$. Infine il grado di ϵ su $\mathbb{Q}$ è il grado del polinomio cicolotomico $\Phi_8(x)$, ovvero $\phi(8) = \phi(2^3) = (2-1)2^2 = 4$. Questo si può vedere direttamente anche dall'espressione esplicita $\epsilon = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ Una base di E su $\mathbb{Q}$ sarà allora $\{1, \epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3\}$ ovvero $\{1, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, i, \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\}$.

3. Determinare la cardinalità dei seguenti anelli e stabilire se tra questi ce ne siano di isomorfi tra loro.

$$A = \mathbb{Z}[i]/(1+i); \qquad B = \mathbb{Z}_2[x]/(x+1) = \mathbb{F}_2[x]/(x+1); \qquad C = \mathbb{Z}[i]/(2)$$

$$|A| = 2 \qquad |B| = 2 \qquad |C| = 4$$

   Gli anelli A e B sono isomorfi tra loro.
   Infatti

   $A \cong \mathbb{Z}[x]/(x+1, x^2+1) = \mathbb{Z}[x]/(2, x+1) \cong (\mathbb{Z}[x]/(x+1)) \,/\, ((2, x+1)/(x+1)) \cong \mathbb{Z}/(2) \cong \mathbb{F}_2.$

$$B = \mathbb{F}_2[x]/(x+1) \cong \mathbb{F}_2$$

   Dunque $A \cong B$ ed hanno entrambi cardibalità 2.

   $C = \mathbb{Z}[i]/(2) \cong \big(\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)\big) \,/\, \big((2, x^2+1)/(x^2+1)\big) \cong (\mathbb{Z}[x]/(2)) \big((2, x^2+1)/(x^2+1)\big) \cong \mathbb{F}_2[x]/(x^2+1)$

   Dunque C ha cardinalità 4 e non può essere isomorfo ad A nè a B.

4. Sia $I \subseteq \mathbb{Q}[x]$ l'ideale
$$I = (x^3 - 4x^2 + x + 6, x^3 - 6x^2 + 11x - 6).$$

(a) I è un ideale principale? sì ☑ no ☐
Questo è vero semplicemente perché $\mathbb{Q}[x]$ è un dominio a ideali principali e dunque tutti i suoi ideali sono principali.

(b) In caso affermativo un generatore di I è $x^2 - 5x + 6$.
Questo si dimostra facilmente mediante l'algoritmo euclideo delle divisioni successive.

(c) Sia $A = \mathbb{Q}[x]/I$. La classe dell'elemento $x+1$ (indicata con $\overline{x+1}$ o con $[x+1]$ a seconda dei canali) è invertibile in A?

sì ☑ no ☐

Infatti $(x^2 - 5x + 6, x + 1) = (1)$ come si vede facilmente dalla fattorizzazione $x^2 - 5x + 6, x + 1 = (x-2)(x-3)$ o utilizzando di nuovo l'algoritmo euclideo delle divisioni successive.

(d) In caso affermativo esibire l'inverso:
$$\overline{x+1}^{\,-1} = [x+1]^{-1} = [-\frac{1}{12}(x-6)]$$
Infatti si può esibire un inverso determinando un'identità di Bezout
$$a(x)\,(x^2 - 5x + 6) + b(x)\,(x+1) = 1.$$
Effettuando la divisione col resto si trova
$$x^2 - 5x + 6 = (x-6)(x+1) + 12$$
ovvero
$$\frac{1}{12}(x^2 - 5x + 6) - \frac{1}{12}(x-6)(x+1) = 1.$$
Da questo segue
$$[-\frac{1}{12}(x-6)][x+1] = 1,$$
ovvero
$$[x+1]^{-1} = [-\frac{1}{12}(x-6)].$$

5. Dire se i seguenti elementi siano algebrici o trascendenti su $\mathbb{Q}$. Se algebrici specificare il corrispondente polinomio minimo.

(a) $\sqrt{2} + \pi$ è trascendente su $\mathbb{Q}$. Infatti se fosse algebrico allora $\pi = (\sqrt{2} + \pi) + (-\sqrt{2})$ sarebbe algebrico in quanto somma di due numeri algebrici.

(b) $\sqrt{3} + 2i$ è algebrico su $\mathbb{Q}$ in quanto somma di due numeri algebrici. Il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ è
$$x^4 + 2x^2 + 49 = (x - (\sqrt{3} + 2i))(x - (\sqrt{3} - 2i))(x - (-\sqrt{3} + 2i))(x - (-\sqrt{3} - 2i)).$$

(c) ζ^2, dove ζ è una radice 14-esima primitiva dell'unità è algebico su $\mathbb{Q}$, in quanto ζ^2 è una radice settima dell'unità. Inoltre ζ^2 è una radice settima primitiva dell'unità, quindi il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ è il settimo polinomio ciclotomico $\Phi_7(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.