Nome .... Cognome .... Matricola ....

ALGEBRA 1

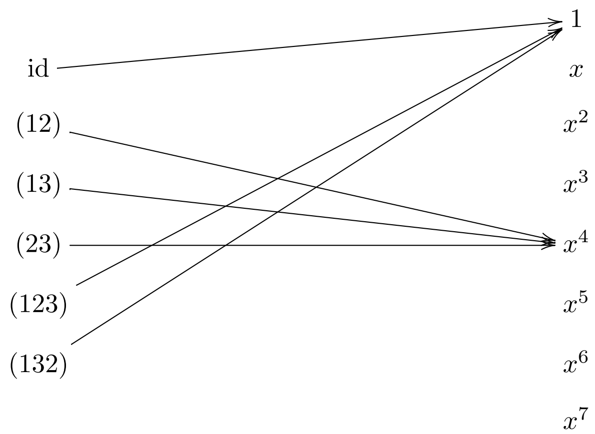
a.a. 2017/18

prof. V. Barucci, D. Fiorenza, E. Spinelli

Prova scritta del 19 giugno 2018 (12 CFU)

Tempo a disposizione per lo svolgimento della prova: 2 ore e mezza.

1. Esibire, se possibile, un omomorfismo non banale da S_3 a C_8 indicando mediante frecce l'immagine di ogni elemento.



2. Stabilire se il gruppo $U(\mathbb{Z}_{13})$ degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{13}$

   a) è ciclico: sì ☑ no ☐. Infatti ...

   $U(\mathbb{Z}_{13}) = \langle \overline{2} \rangle$

   b) possiede sottogruppi di ordine 4: sì ☑ no ☐. In caso affermativo elencarli

   Soluzione: L'unico sottogruppo di ordine 4 è $\langle \overline{2}^3 \rangle = \{\overline{2}^3 = \overline{8}, \quad \overline{2}^6 = \overline{12}, \quad \overline{2}^9 = \overline{5}, \quad \overline{2}^{12} = \overline{1}\}$

3. Trovare in $\mathbb{Z}[i]$ il MCD γ tra $\alpha = 6$ e $\beta = 7 + 7i$:

$$\gamma = 1 + i$$

   Stabilire inoltre se l'ideale generato da γ è massimale:

   massimale ☑ non massimale ☐ (perché $1 + i$ è irriducibile)

4. Sia $A = \mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2x^2 - 2x - 3, x^4 + x^3 + 5x^2 + 4x + 4)$.

   a) Dimostrare che A è un campo:

   Soluzione: poiché $x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x^2 + x + 1)$ e $x^4 + x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = (x^2+4)(x^2+x+1)$, l'ideale generato dai due polinomi è l'ideale generato dal solo polinomio $x^2 + x + 1$. Questo è irriducibile, quindi genera un ideale massimale, da cui il quoziente A è un campo.

   b) in A trovare l'inverso della classe di x.

   Soluzione: l'inverso della classe di x è

$$\overline{x}^{-1} = \overline{-x-1}$$

5. Sia $\mathbb{K}$ il campo $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, {}^3\sqrt{2})$.

   Il grado di $\mathbb{K}$ su $\mathbb{Q}$ è: $\ldots 6$

   Una base per $\mathbb{K}$ su $\mathbb{Q}$ è: $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{2}\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt{2}\sqrt[3]{4}$

   È possibile trovare in $\mathbb{K}$ un elemento α di grado 4 su $\mathbb{Q}$? sì ☐ no ☑

   Un elemento primitivo per l'estensione $\mathbb{K}$ di $\mathbb{Q}$ è: $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$. Un'altra possibilità è $\sqrt{2}/\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2}$.