

Nome Cognome Matricola

ALGEBRA 1

a.a. 2017/18

prof. V. Barucci, D. Fiorenza, E. Spinelli

Prova scritta del 19 giugno 2018 (9 CFU)

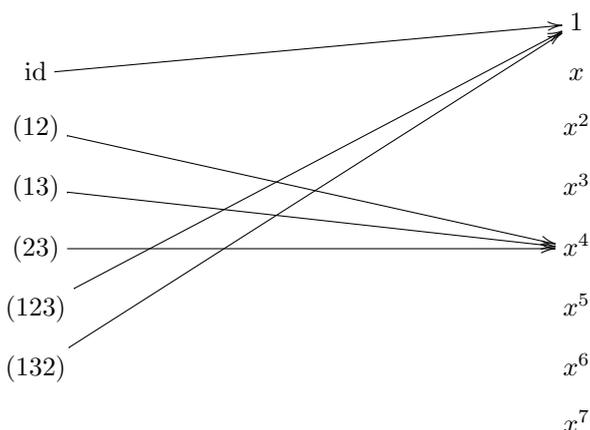
Tempo a disposizione per lo svolgimento della prova: 2 ore e mezza.

1. Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbb{Z}$ il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 2X \equiv 3 \pmod{5} \\ 4X \equiv a \pmod{6} \\ 3X \equiv 2 \pmod{8} \end{cases}$$

- Il sistema ha soluzione per $a = 3$? sí no
Se sì, la soluzione in questo caso è $X \equiv \dots \pmod{\dots}$
- Il sistema ha soluzione per $a = 8$? sí no
Se sì, la soluzione in questo caso è $X \equiv 14 \pmod{120}$
- Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{Z}$ il sistema di congruenze dato ha soluzione?
Soluzione: Il sistema ha soluzione per $a \equiv 0 \pmod{2}$
- Nei casi in cui il sistema abbia soluzioni, queste sono date da $X \equiv 54 - 40\frac{a}{2} \pmod{120}$

2. Esibire, se possibile, un omomorfismo non banale da S_3 a C_8 indicando mediante frecce l'immagine di ogni elemento.



3. Stabilire se il gruppo $U(\mathbb{Z}_{13})$ degli elementi invertibili di \mathbb{Z}_{13}

a) è ciclico: sì no . Infatti ...

$$U(\mathbb{Z}_{13}) = \langle \bar{2} \rangle$$

b) possiede sottogruppi di ordine 4: sì no . In caso affermativo elencarli

Soluzione: L'unico sottogruppo di ordine 4 è $\langle \bar{2}^3 \rangle = \{\bar{2}^3 = \bar{8}, \bar{2}^6 = \bar{12}, \bar{2}^9 = \bar{5}, \bar{2}^{12} = \bar{1}\}$

4. Trovare in $\mathbb{Z}[i]$ il MCD γ tra $\alpha = 6$ e $\beta = 7 + 7i$:

$$\gamma = 1 + i$$

Stabilire inoltre se l'ideale generato da γ è massimale:

massimale non massimale (perché $1 + i$ è irriducibile)

5. Sia $A = \mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2x^2 - 2x - 3, x^4 + x^3 + 5x^2 + 4x + 4)$.

a) Dimostrare che A è un campo:

Soluzione: poiché $x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x^2 + x + 1)$ e $x^4 + x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = (x^2 + 4)(x^2 + x + 1)$, l'ideale generato dai due polinomi è l'ideale generato dal solo polinomio $x^2 + x + 1$. Questo è irriducibile, quindi genera un ideale massimale, da cui il quoziente A è un campo.

b) in A trovare l'inverso della classe di x .

Soluzione: l'inverso della classe di x è

$$\bar{x}^{-1} = \overline{-x - 1}$$