Appena posso completo queste note rendendole una dimostrazione completa del teorema dimostrato oggi; per ora correggo un paio di spiacevoli errori nella lezione di oggi e scrivo in modo più pulito il termine $E_\infty^{p,q}$.

Per definizione, si ha

$$E_1^{p,q} = \frac{\ker\left\{d\colon F^pM^{p+q}/F^{p+1}M^{p+q} \to F^pM^{p+q+1}/F^{p+1}M^{p+q+1}\right\}}{\mathrm{Im}\left\{d\colon F^pM^{p+q-1}/F^{p+1}M^{p+q-1} \to F^pM^{p+q}/F^{p+1}M^{p+q}\right\}}$$

Il numeratore si riscrive come

$$\begin{aligned}\ker&\left\{d\colon F^pM^{p+q}/F^{p+1}M^{p+q} \to F^pM^{p+q+1}/F^{p+1}M^{p+q+1}\right\}\\ &= \left\{a \in F^pM^{p+q} \,:\, da \in F^{p+1}M^{p+q+1}\right\}/F^{p+1}M^{p+q}\end{aligned}$$

A lezione ho detto (erroneamente) che, analogamente, il denominatore è

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}&\left\{d\colon F^pM^{p+q-1}/F^{p+1}M^{p+q-1} \to F^pM^{p+q}/F^{p+1}M^{p+q}\right\}\\ &= \left\{db \,:\, b \in F^pM^{p+q-1}\right\}/F^{p+1}M^{p+q}\end{aligned}$$

e da qui è poi nata tutta la mia confusione. In realtà il denominatore non può scriversi in quel modo per la semplice evidente ragione che $F^{p+1}M^{p+q}$ non è un sottomodulo di $\left\{db \,:\, b \in F^pM^{p+q-1}\right\}$. La scrittura corretta è

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}&\left\{d\colon F^pM^{p+q-1}/F^{p+1}M^{p+q-1} \to F^pM^{p+q}/F^{p+1}M^{p+q}\right\}\\ &= \left(\left\{a = db \,:\, b \in F^pM^{p+q-1}\right\} + F^{p+1}M^{p+q}\right)/F^{p+1}M^{p+q}\end{aligned}$$

Adesso si può semplificare e scrivere

$$\begin{aligned}E_1^{p,q} &= \frac{\left\{a \in F^pM^{p+q} \,:\, da \in F^{p+1}M^{p+q+1}\right\}/F^{p+1}M^{p+q}}{\left(\left\{a = db \,:\, b \in F^pM^{p+q-1}\right\} + F^{p+1}M^{p+q}\right)/F^{p+1}M^{p+q}}\\ &= \frac{\left\{a \in F^pM^{p+q} \,:\, da \in F^{p+1}M^{p+q+1}\right\}}{\left\{db \,:\, b \in F^pM^{p+q-1}\right\} + \left\{c \in F^{p+1}M^{p+q}\right\}}\end{aligned}$$

Ossrviamo che, se $b \in F^pM^{p+q-1}$, allora $db \in F^pM^{p+q}$ e quindi

$$\left\{db \,:\, b \in F^pM^{p+q-1}\right\} = \left\{db \,:\, b \in F^pM^{p+q-1}\right\} \cap F^pM^{p+q},$$

inoltre, se $c \in F^{p+1}M^{p+q}$, allora $dc \in F^{p+1}M^{p+q+1}$, da cui

$$\left\{c \in F^{p+1}M^{p+q}\right\} = \left\{c \in F^{p+1}M^{p+q} \,:\, dc \in F^{p+1}M^{p+q+1}\right\},$$

e possiamo scrivere

$$\begin{aligned}E_1^{p,q} &= \frac{\left\{a \in F^pM^{p+q} \,:\, da \in F^{p+1}M^{p+q+1}\right\}/F^{p+1}M^{p+q}}{\left(\left\{a = db \,:\, b \in F^pM^{p+q-1}\right\} + F^{p+1}M^{p+q}\right)/F^{p+1}M^{p+q}}\\ &= \frac{\left\{a \in F^pM^{p+q} \,:\, da \in F^{p+1}M^{p+q+1}\right\}}{\left\{db \,:\, b \in F^pM^{p+q-1}\right\} + \left\{c \in F^{p+1}M^{p+q} \,:\, dc \in F^{p+1}M^{p+q+1}\right\}}\end{aligned}$$

Questa scrittura ridondante serve a preparate la scrittura della generica pagina E_r; in generale si ha:

$$E_r^{p,q} = \frac{\big\{a \in F^p M^{p+q} \,:\, da \in F^{p+r} M^{p+q+1}\big\}}{(\{db \,:\, b \in F^{p-r+1} M^{p+q-1}\} \cap F^p M^{p+q}) + \{c \in F^{p+1} M^{p+q} \,:\, dc \in F^{p+r} M^{p+q+1}\}}$$

A lezione per ragioni misteriose, la seconda parte del denominatore è diventata, scorrettamente, $\{c \in F^{p+r} M^{p+q} \,:\, dc = 0\}$. le ragioni di questa allucinazione non sono poi così misteriose: per $r = \infty$ si trova appunto

$$E_\infty^{p,q} = \frac{\{a \in F^p M^{p+q} \,:\, da = 0\}}{(\{db \,:\, b \in M^{p+q-1}\} \cap F^p M^{p+q}) + \{c \in F^{p+1} M^{p+q} \,:\, dc = 0\}}$$

Ricordando le notazioni

$$Z^{p+q}(M) = \{a \in M^{p+q} \,:\, da = 0\}; \qquad B^{p+q}(M) = \{db \,:\, b \in M^{p+q-1}\}$$

questo si riscrive come

$$E_\infty^{p,q} = \frac{Z^{p+q}(M) \cap F^p M^{p+q}}{(B^{p+q}(M) \cap F^p M^{p+q}) + (Z^{p+q}(M) \cap F^{p+1} M^{p+q})}$$

Ricordando che

$$\frac{A}{B+C} = \frac{A/B}{C/(B \cap C)}$$

questo diventa

$$\begin{aligned}
E_\infty^{p,q} &= \frac{(Z^{p+q}(M) \cap F^p M^{p+q}) \big/ (B^{p+q}(M) \cap F^p M^{p+q})}{(Z^{p+q}(M) \cap F^{p+1} M^{p+q}) \big/ (B^{p+q}(M) \cap F^p M^{p+q} \cap Z^{p+q}(M) \cap F^{p+1} M^{p+q})} \\
&= \frac{(Z^{p+q}(M) \cap F^p M^{p+q}) \big/ (B^{p+q}(M) \cap F^p M^{p+q})}{(Z^{p+q}(M) \cap F^{p+1} M^{p+q}) \big/ (B^{p+q}(M) \cap F^{p+1} M^{p+q})} \\
&= \frac{F^p H^{p+q}(M)}{F^{p+1} H^{p+q}(M)} \\
&= \mathrm{Gr}^p(H^{p+q}(M)).
\end{aligned}$$