1ª edizione: ottobre 1990
Fotocomposizione: Saffe, Firenze
Stampa: SAT, San Giustino (Perugia)

LA MATEMATICA
NELLA SCUOLA ELEMENTARE

GEOMETRIA

a cura di
Claudio Bernardi, Lucilla Cannizzaro,
Nicoletta Lanciano, Patrizia Mentrasti

La Nuova Italia

Hanno collaborato alla stesura del materiale: Anna Allerhand, Adria Archetti, Maria Rosa Ardizzone, Susanna Armiento, Nella Benedetti, Claudio Bernardi, Maria Luisa Bigiaretti, Rosa Bocchieri, Vittoria Busatto, Aurora Campanella, Lucilla Cannizzaro, Delia Castiglia, Laura Cerquetta, Sebastiano Conte, Paola Crocini, Luigi Destro, Rosalba Di Marco, Anna Donegà, Loretta Ferrante, Laura Fuiani, Francesca Guercio, Maria Cristina Ipsevich, Nicoletta Lanciano, Alessandro Laureti, Maria Antonietta Marini Menghi, Anna Maria Marlia, Patrizia Mentrasti, Giovanni Olivieri, Ferruccio Rohr, Ida Sacchetti, Delia Sammartino, Stefania Santarelli, Franca Ida Scavazza, Alceo Selvi, Maurizio Vaccaro, Rosalba Vellucci e Rosalba Vitale.

La revisione del materiale ha potuto fare tesoro anche delle osservazioni, delle critiche e delle proposte che i docenti animatori hanno fatto durante i corsi di formazione.

Un particolare ringraziamento a Franca Falco, Patrizia e Simona Maiolo, Daniela e Teresa Mari che hanno curato la videoscrittura dei materiali di lavoro.

La **matematica** nella scuola elementare : geometria. — (Didattica viva ; 167. Quaderni dell'IRRSAE Lazio ; 3). — ISBN 88-221-0841-8
1. Matematica - Insegnamento - Scuola elementare
I. Bernardi, Claudio II. Cannizzaro, Lucilla III. Lanciano, Nicoletta IV. Mentrasti, Patrizia
372.7

INDICE

PREMESSA

1. Per una lettura di questo materiale

I docenti di scuola elementare sono stati sollecitati dalla introduzione dei Nuovi Programmi a riesaminare la propria attività didattica cercando conferme e nuovi spunti sia sul piano delle singole discipline che su quello dei metodi di insegnamento. Dei Nuovi Programmi due aspetti generali ci pare sia necessario sottolineare oggi perché non vadano trascurati nel futuro: la considerazione prioritaria del bambino nella sua globalità e interezza e la risultante attenzione ad aspetti generali che prescindono dalle singole discipline pur nella esaltazione degli specifici contributi disciplinari.

Contestualmente alla sostituzione del maestro unico «con maestri per aree disciplinari» viene indicata, come specifica competenza professionale, la possibilità di avere presenti i contributi educativi delle singole discipline, delle connessioni tra esse e la percorribilità didattica dei singoli spunti in una situazione di gestione a più mani del curricolo. Tale situazione rappresenta, tra l'altro, una precisa richiesta alla formazione di base dei futuri insegnanti; se, infatti, la formazione per aree disciplinari non avrà come prerequisito una solida preparazione culturale e professionale diverrà non attuabile proprio questo aspetto generale.

Il materiale che presentiamo è stato suddiviso in tre volumi (i titoli degli altri due sono: *La matematica nella scuola elementare. Il numero e le abilità numeriche. Problemi*; *La matematica nella scuola elementare. Logica. Informatica. Probabilità e statistica*). Esso non pretende di esaurire la trattazione di alcuno dei temi dei Nuovi Programmi né dal punto di vista matematico né da quello didattico, né sul versante di temi «tradizionali» né su quello di temi «innovativi»: sicuramente, però, risponde a una richiesta di mediazione tra esigenze disciplinari ed esigenze didattiche.

Tre sono gli elementi fondamentali che costituiscono la struttura portante del materiale:

1) ogni considerazione è ancorata ai Nuovi Programmi che sono riconosciuti, sia rispetto a scelte di contenuti che di proposte metodologiche e didattiche, come quella sintesi avanzata da promuovere nella attuazione quotidiana generalizzata;

2) l'assunzione che l'intera educazione scolastica elementare deve svilupparsi in una sostanziale ricerca di coerenza e di integrazione ha portato a collegare l'insegnamento della matematica con l'educazione psicomotoria, linguistica e scientifica in considerazione dello stretto legame esistente tra pensiero e azione;

3) la convinzione che anche la formazione matematica sia un fatto unitario ma che permangano come fondamentali l'intuizione di *spazio* e quella di *numero*, ovvero di struttura continua e struttura discreta (non continua), ha portato a collegare e integrare tra loro le problematiche dell'insegnamento delle grandi aree tematiche dei Nuovi Programmi: problemi, numeri, geometria, logica, probabilità, informatica, assumendo come punto qualificante un rinnovato modo di considerare la geometria e i numeri.

Tenere presenti i tre elementi sopra accennati si è risolto nell'individuare dei temi trasversali alle varie aree. Alcuni di tali temi hanno carattere matematico come i concetti di regolarità e funzione. Altri temi, invece, hanno carattere logico-generale come la capacità di ordinare, classificare, elaborare simboli e lavorare con essi. Altri ancora hanno carattere didattico come il ruolo dell'attività ludica, l'enfasi su aspetti costruttivi e operativi dei concetti, il principio della variabilità del materiale, il ruolo di tre distinti (ma copresenti) sistemi di rappresentazione delle esperienze personali (cfr. pp. XII-XIV), la molteplicità degli approcci a concetti, operazioni e linguaggi. E proprio per questa ultima caratteristica pensiamo che questo materiale risulti un'utile base di partenza verso varie direzioni sia sul piano della prima formazione che su quello di una successiva riflessione critica.

Seguono la parte di riflessione disciplinare e didattica alcune indicazioni per lo svolgimento di attività che sono state raccolte sotto il titolo «Schede per attività di laboratorio». Il fatto di avere voluto mettere tali proposte «in fondo» risponde a esigenze espositive. Si invita a servirsi di tali spunti contestualmente alla lettura della parte espositiva. Le schede sono pensate per i docenti e quelle che contengono proposte per i ragazzi sono ben individuate sia nel testo che nelle attività di laboratorio.

2. Per una lettura dei Nuovi Programmi

In campo educativo è relativamente facile rinnovare i contenuti e i cambiamenti tendono, spesso, ad assumere carattere permanente. Più difficile è modificare i metodi di insegnamento e i cambiamenti sono di frequente temporanei. Ancora più impegnativa appare una sostanziale modifica degli obiettivi generali anche se, poi, cambiamenti assumono carattere stabile. Sicuramente, in tutti e tre i casi, per avere sostanziali variazioni nell'attività didattica occorrono tempi lunghi, impegno costante da parte degli insegnanti, attività di aggiornamento e di prima formazione che tengano conto delle mutate esigenze.

Di certo, in tutti e tre i casi, e in particolare modo per la scuola elementare, occorre consentire una rinnovata sintesi di contenuti, di concetti e di concezioni generali sia sul versante pedagogico sia su quello metodologico sia, ancora, su quello delle singole discipline.

Le innovazioni non sono necessariamente da intendere come novità avanzate sul piano disciplinare e metodologico; è nuovo ciò che viene visto per la prima volta o rivisto sotto altra luce o considerato con un mutato ruolo di importanza sul piano didattico.

Alla scuola, attraverso i suoi molteplici, complessi, anche se spesso poco dichiarati, legami con la situazione reale (sociale, politica, economica, culturale), sono state date nuove finalità formative in seguito ai cambiamenti avvenuti in campo filosofico, ideologico, politico e dal progredire e mutare sia delle scienze pedagogiche che delle singole discipline. Nuovi contenuti, nuova rilevanza o nuove valenze di contenuti tradizionali sono suggeriti, inoltre, dal progresso delle discipline e dal mutare della situazione economica e sociale.

In Italia, nel settore della scuola elementare, i Nuovi Programmi del 1985 hanno reso manifesti e irrinunciabili cambiamenti già esistenti nella realtà didattica di molte classi e prodotti nel tempo da singoli e da gruppi.

I Nuovi Programmi costituiscono un progetto culturale ed educativo unitario teso a fare maturare la formazione e lo sviluppo della personalità individuale e l'educazione alla convivenza sociale attraverso la realizzazione di un'alfabetizzazione culturale generalizzata. Tale progetto esige un passaggio continuo da «una impostazione unitaria predisciplinare» verso «l'emergere di ambiti disciplinari progressivamente differenziati»; presuppone, cioè, lo stabilirsi di un ambiente di apprendimento formativo, all'interno della classe, centrato sul bambino.

La matematica, così come le altre discipline, e con specificità proprie, concorre in modo prioritario alla:
— formazione del pensiero;
— costruzione di abilità e alla maturazione di capacità generali sul piano cognitivo;
— attivazione di processi e operazioni mentali.

Nella premessa ai Nuovi Programmi si accenna al recente movimento di riforma dell'insegnamento elementare della matematica. Le principali motivazioni culturali dei Nuovi Programmi scaturiscono proprio dalle ragioni ideali di tale movimento.

Tentiamo qui di disegnare schematicamente alcune tappe dell'evoluzione storica dei programmi nella scuola elementare.

Prima degli anni Sessanta, per l'insegnamento della matematica prevale una finalizzazione esterna; la matematica viene vista come strumento pratico per la contabilità familiare e commerciale. Esemplificativi sono i programmi del 1955 nei quali i contenuti sono limitati all'essenziale e ridotti al minimo pur essendo nella loro ispirazione generale ricondotti ai principi della «scuola attiva». Data però la difficoltà di applicazione dei metodi attivi ne è spesso scaturita un'interpretazione della matematica del tutto riduttiva.

Durante gli anni Sessanta viene focalizzata l'importanza di un adeguato avviamento allo studio di alcune semplici nozioni geometriche. Prevalgono finalità interne alla disciplina e si diffonde l'approccio «insiemistico» per la fondazione del concetto di numero e del significato delle operazioni. Possiamo schematicamente delineare un bilancio di tale approccio attraverso la seguente lista di meriti e demeriti:
— definizione di nuovi e più importanti obiettivi formativi di carattere generale;
— scansione più lenta e più graduale dell'itinerario dei primi studi di matematici;
— attenzione all'apprendimento ottenuto mediante le esperienze manipolative «scolastiche»;
— misconoscimento delle esperienze precedenti del bambino (tesaurizzate nelle passate stesure dei programmi);
— uso sproporzionato di strumenti matematici fruttuosi e necessari nel caso di insiemi infiniti (come i numeri naturali o i razionali o i reali) ma talvolta inutili e quasi sempre «banali» nell'applicazione al caso di insiemi finiti (come le caramelle o i bambini, ecc.);
— importanza attribuita, in accordo anche con le correnti di pensiero del momento, alla ricerca di strutture fondamentali.

Negli anni Settanta si avviano le prime riflessioni sugli sbandamenti prodotti nel curricolo elementare da un'eccessiva enfasi data alla nozione e al linguaggio degli insiemi. Si approfondiscono gli studi sulla complessità dei processi cognitivi coinvolti nella formazione dei concetti di numero; emergono precisi orientamenti di didattica disciplinare che riconoscono un ruolo essenziale ad approcci plurimi e non unidirezionali. Per l'Italia ne è esempio il Progetto RICME (1975-1981) promosso con finanziamento del Consiglio nazionale delle Ricerche.

A partire dagli anni Ottanta l'attenzione viene essenzialmente centrata:
— sulle particolari difficoltà che gli allievi incontrano nella risoluzione dei problemi;
— sulle strategie «primitive» adottate nel risolverli;
— sulla introduzione di nuovi temi come probabilità, statistica, logica e informatica.

In parallelo alla stesura e alla prima diffusione dei Nuovi Programmi, l'esplosione dell'informatica e l'uso sempre più esteso dei calcolatori determinano:
— la necessità di realizzare un approccio alla matematica adatto a favorire uno sviluppo della «cultura dell'algoritmo»;
— la rivalutazione dell'indirizzo cosiddetto «costruttivista» nella fondazione della matematica;
— la necessità di adottare per la matematica della scuola primaria un impianto didattico adatto a «piegare l'informatica e, se necessario, anche il calcolatore ai bisogni formativi dei bambini di oggi».

Nei Nuovi Programmi il quadro di riferimento didattico generale per la matematica ci pare ben descritto dai seguenti cinque punti:

a) ruolo attivo del bambino nell'ambiente di apprendimento matematico;

b) continuità del processo educativo: dalle esperienze della scuola materna verso il programma di scuola media in uscita;

c) valorizzazione della funzione creativa e socializzante dei giochi, matematici e non;

d) equilibrato dimensionamento dei momenti di manipolazione, di raffigurazione e di simbolizzazione;

e) attenzione per tutti gli aspetti dell'attività matematica nei suoi tre livelli: intuitivo, algoritmico e formale.

Il quadro disciplinare generale in base al quale sono state sviluppate le singole parti è egregiamente sintetizzato da M. Pellerey (1986, pp. 56-57), che qui citiamo testualmente:

A. Breve introduzione circa le finalità dell'insegnamento della matematica e circa il senso del programma sviluppato. Come leggere gli obiettivi.

B. L'approccio generale alla matematica da privilegiare: approccio per problemi nel quadro di una progressiva organizzazione delle conoscenze.

C. L'aritmetica: numeri naturali e operazioni su di essi, numeri decimali. Il concetto di numero è complesso, non può essere ridotto unidimensionalmente, né può essere accorciato il lungo itinerario che conduce a un suo possesso significativo e fecondo.

D. La geometria. Va valorizzata assai più che nel passato. Include non solo l'organizzazione dello spazio, ma anche l'introduzione di sistemi di riferimento. I concetti e la pratica della misura hanno un ruolo specifico e di grande rilevanza, anche in prospettiva interdisciplinare.

E. Logica e probabilità sono una presa di coscienza e una rappresentazione progressivamente più precisa di quella che si può chiamare la grammatica del pensare in modo coerente, sia in condizioni di certezza che di incertezza. Il linguaggio naturale è la base non solo dello sviluppo della logica, ma anche di ogni possibilità di un discorso sulla matematica.

F. Statistica e informatica sono sviluppi assai importanti dell'aritmetica. La prima centra la sua attenzione sui grandi numeri, l'altra sui procedimenti. È necessario promuovere attività ed esperienze che consentano nella scuola media una buona sistemazione di questi concetti.

3. I processi di acquisizione della conoscenza

Per l'insegnamento-apprendimento di ogni disciplina il problema centrale è considerato oggi quello di riuscire ad avere maggiori informazioni su come apprendono i bambini e sulle modalità in cui si attua lo sviluppo dell'intelligenza.

Il materiale che segue è stato elaborato avendo presente che gli esseri umani in generale e i bambini in particolare si rappresentano la propria esperienza secondo tre sistemi paralleli, lo sviluppo di ciascuno dei quali caratterizza un determinato periodo della vita del bambino.

Nell'adulto, ogni qual volta è necessario rappresentare o usare le proprie conoscenze, uno di questi tre sistemi prevale sull'altro o interagisce con gli altri.

Il primo mezzo di rappresentazione è quello che Bruner chiama *endoattivo* e cioè la *rappresentazione mediante l'azione*. È questa la rappresentazione propria dei bambini molto piccoli che identificano gli oggetti attraverso le azioni che evocano. Tale sistema di rappresentazione continua, comunque, a essere usato dagli adulti

quando le parole o le immagini non riescono a surrogare l'esperienza diretta (che cosa è un nodo alla marinara? Come si esegue un certo gioco?).

Un altro mezzo di rappresentazione è costituito dalla *rappresentazione iconica* attraverso la quale indipendentemente dall'azione si rappresenta la propria esperienza attraverso le immagini. Questa modalità di rappresentazione comincia a svilupparsi abbastanza presto e con il passare del tempo diventa sempre più complessa. Caratteristica della rappresentazione iconica è la capacità di organizzare le proprie percezioni e di controllarne le trasformazioni. È opportuno ricordare a tale proposito che per Piaget l'immagine visiva è ben diversa dalla percezione visiva e si forma esclusivamente se il bambino ha eseguito l'esplorazione tattile sull'oggetto da cui può astrarla. Si può affermare che l'immagine è l'*interiorizzazione di un'azione* e una volta avvenuta tale interiorizzazione l'azione può essere evocata dalla sua rappresentazione. In tal senso possiamo pensare all'immagine visiva come «cerniera» tra i due primi tipi di rappresentazione.

Infine, il bambino procede verso uno stadio ulteriore nel quale è capace di trattare le cose traducendole in parole, di rappresentarsele nominandole tra sé e sé via via che interiorizza il linguaggio. Questa terza forma è essenzialmente *simbolica*: simboli e parole sono arbitrari e può non esservi analogia tra l'oggetto e il simbolo che lo rappresenta.

Nel bambino, come nell'adulto, questi tre modelli non sono mai del tutto separati; nella rappresentazione endoattiva è presente la capacità di percezione e quindi un'iniziale attività di concettualizzazione; nel momento in cui si organizzano le percezioni e le immagini si ha ancora una forma di manipolazione unita alla capacità di usare l'immagine come simbolo; nel terzo momento, caratterizzato dallo sviluppo di un apparato simbolico, sono presenti le azioni che accompagnano le parole e le immagini che esse evocano. Nell'apprendimento di un concetto o nell'acquisizione di un'abilità è quindi indispensabile far corrispondere ciò che si fa alla sua riproduzione tanto grafica che simbolica.

L'uso di questi tre modelli permette a tutti i bambini normodotati (e nei limiti consentiti dalla natura dell'handicap anche a bambini con problemi di apprendimento) di acquisire nuovi concetti e di usarli per successive elaborazioni.

La scuola tradizionale trascura di solito i primi due momenti e, in un'età caratterizzata da un modello di rappresentazione connotato fortemente dalla percezione e dall'elaborazione di immagini mentali, utilizza modelli esclusivamente simbolici, che escludono dal processo di apprendimento numerosi bambini. È invece importante considerare un principio di variabilità del materiale, ovvero di uso di molteplici materiali diversi. Tale principio è necessario per aiutare i bambini a non identificare aspetti concettuali generali con particolari e «accidentali» realizzazioni pratiche di tali concetti.

È utile, inoltre, avere presente che anche da un punto di vista strettamente matematico è possibile distinguere almeno tre livelli di astrazione: un'astrazione spontanea, un'astrazione concettuale e un'astrazione assiomatica (Servais, 1982).

La costruzione di singoli concetti e specifiche abilità è un processo graduale non semplice, non lineare, articolato, e richiede tempi lunghi e numerose attività. Ne sono esempio il concetto di numero e le abilità numeriche. Abilità numeriche presuppongono un certo livello di maturazione del concetto di numero naturale ma sicuramente lo potenziano e lo promuovono.

4. Le concezioni della matematica

Accenniamo qui brevemente e per sommi capi a tre diverse concezioni storicamente ben individuate, spesso compresenti ma quasi sempre contrastanti:

— una concezione *platonica*, che vede la matematica come architettura razionale preesistente e da scoprire con un metodo logico-deduttivo. Le costruzioni matematiche sono precise, intoccabili, da non corrompere;

— una concezione *realista*, che vede la matematica estraibile dalla realtà sensibile con procedure di indagine induttivo-sperimentali;

— una concezione *logicista*, che fa riferimento alla struttura stessa del pensiero umano, al modo di elaborare informazioni recuperate dall'esterno (realtà, conoscenze altrui, ecc.) e dall'interno (conoscenze individuali). La matematica è elaborazione di riflessioni critiche, di schemi mentali, di modelli di ragionamento, di regole di coerenza, di strutture generali.

Ogni concezione genera potenzialità, possibilità, metodi e procedimenti didattici diversi. Esemplifichiamo questa affermazione riportando un brano tratto dal già citato contributo di M. Pellerey (1986, p. 51):

> La concezione logicista ha avuto il suo momento di gloria, ma oggi ha non pochi e ben agguerriti oppositori. Il suo sviluppo formalista, che ha avanzato la richiesta di esprimere tutte le affermazioni e le argomentazioni in forme altamente astratte e simboliche, cercava di evitare alcuni problemi teorici assai complessi. Esso tendeva ad escludere dalle formule qualsiasi significato. Gli enunciati matematici si dovevano considerare solo come formule vuote, che non hanno bisogno né di riferimenti concettuali, né di immagini interne; basta che essi entrino coerentemente in un impianto logico-formale. La conseguenza più ovvia sul piano didattico è stata una soverchia attenzione data alla manipolazione corretta di formule senza significato e una puntigliosa esigenza di definizioni precise, stereotipate, spesso inutilmente astratte.
>
> Queste osservazioni non devono però nascondere l'estrema importanza che una corretta formulazione e una valida formalizzazione hanno all'interno del pensiero matematico. Non solo, la correttezza logica e il ragionamento coerente sono componenti insostituibili di ogni sviluppo della matematica. Tuttavia nella scuola, e soprattutto nei suoi primi anni, è indispensabile valorizzare un'impostazione ben diversa. Ciò che interessa da questo punto di vista non è tanto la formula, l'espressione formalmente esatta, quanto la sostanza dei concetti, il significato dei principi, il senso e il perché dei procedimenti.

Attualmente sia in campo matematico che in campo educativo non si è propensi ad abbracciare una singola concezione come assoluta e totalizzante ma si preferisce una visione pluralista. E questo sia perché si sono registrati risultati positivi sotto le varie tendenze sia perché si è riconosciuto che da un punto di vista educativo vi sono criteri «locali» per prediligere l'una o l'altra. E il termine «locale» va riferito o a singoli stili cognitivi o a singole situazioni didattiche o a singoli temi matematici.

Nell'insegnamento della matematica è possibile individuare, in prima approssimazione, due stili didattici che per comodità e chiarezza schematizziamo come dicotomici:

a) *stile formalistico-descrittivo*, adottato da coloro che:

— concepiscono la matematica come un insieme di regole preconfezionate da trasmettere verbalmente;

— propongono come fondamentale la manipolazione dei simboli, privilegiandone i legami sintattici a scapito dei riferimenti semantici;

— privilegiano il ruolo attivo dell'insegnante, nella convinzione che la matematica si possa «insegnare»;

— considerano la matematica come disciplina di natura assolutamente ideale;

b) *stile concreto-costruttivo*, prescelto da coloro che:

— concepiscono lo studio della matematica come itinerario di esperienze e di scoperte personali;

— favoriscono un apprendimento della matematica fondato sulla

manipolazione di oggetti, da realizzare in un laboratorio matematico;
— privilegiano il ruolo attivo dell'alunno, nella convinzione che la matematica non vada insegnata, ma debba essere costruita;
— intendono la matematica soprattutto come progressiva ed organica costruzione di modelli.

5. Conoscere la classe

Tra le indicazioni didattiche espresse nei Nuovi Programmi troviamo: «All'inizio della prima elementare è opportuno che l'insegnante svolga una attenta ricognizione dello stato di preparazione dei singoli alunni in relazione alle esigenze del processo di apprendimento della matematica».

L'analisi della situazione iniziale, che permette di conoscere ciò che i bambini sono in grado di fare, è un lavoro indispensabile specialmente in prima classe. Questo tipo di accertamento non è affatto facile perché molte conoscenze e abilità, a sei anni, sono ancora in fase di sviluppo; molte e diverse possono essere le esperienze in campo logico-matematico e inoltre moltissimi bambini, anche se hanno frequentato la scuola materna, vivono con grande tensione emotiva i primi giorni nella nuova scuola.

All'inizio la tensione emotiva dei bambini si può vincere creando uno spazio al centro dell'aula dove si possono invitare i bambini a giocare, scegliendo ovviamente dei giochi collettivi conosciuti, dei girotondi o qualcuno dei tradizionali giochi popolari infantili, ancora in uso in molte regioni: o mio bel castello, madama Dorè, rosa rosella, è arrivato l'ambasciatore, ecc. È incredibile l'effetto meraviglioso che questi giochi producono: immediatamente nell'ambiente scolastico, anonimo e sconosciuto, entra l'aria di casa, l'atmosfera festosa e rassicurante del cortile, del giardinetto, della scuola materna; le tensioni emotive si distendono, i bambini più ansiosi si rasserenano. E agli insegnanti si offrono opportunità preziose per il primo lavoro d'indagine: essi possono osservare come i bambini si muovono in riga, in colonna, in circolo, e verificare se sanno accordare il proprio passo e la propria voce con gli altri, coordinare parole e movimenti, seguire un ritmo, fermarsi a tempo, ecc.

Solo dopo queste prime osservazioni gli insegnanti potranno seguire gli accertamenti delle capacità più legate alla formazione matematica. Ma anche queste verifiche particolari è bene siano presentate sotto forma di gioco e inserite, con naturalezza, nell'ordinaria attività di classe. Gianni Rodari diceva che si possono insegnare le cose più difficili e più complicate ai bambini facendoli giocare, ridere, divertire. Il suo prezioso suggerimento può far sì che la matematica, fin dai primi giorni, sia vissuta dai bambini come un'attività stimolante, divertente, movimentata con espedienti, trovate, giochi sempre nuovi, diversi, imprevisti. In prima classe avviene l'«impatto» iniziale con le diverse materie; un'impostazione motivante, quindi, potrà condizionare in modo positivo il futuro atteggiamento del bambino verso la scuola e lo studio.

Claparède (1972, pp. 108-111) suggerisce, per la rilevazione iniziale, il metodo della *riflessione parlata*, allo scopo di individuare la capacità di organizzazione del pensiero del bambino. Si propone, cioè, un'attività o un gioco e si chiede al bambino di esprimere, ad alta voce, ciò che sta facendo. Questo metodo, però, all'atto pratico è molto difficile da realizzare; a 6 anni, generalmente, un bambino, specialmente se messo davanti a compiti non del tutto familiari, riesce a eseguirli materialmente ma ha difficoltà a esprimere verbalmente ciò che fa anche perché spesso è bloccato da ansie e insicurezze.

L'insegnante, avendo ben chiaro lo scopo che vuol raggiungere, prima di valutare saprà registrare la reazione verbale ma anche quella motoria, mimica e comportamentale per poter poi risalire all'operazione intellettuale. Soprattutto è importante che l'insegnante intervenga, nella somministrazione delle prove, in modo equilibrato. Egli, ad esempio, creerà situazioni motivanti per ciascuna prova, al fine di:
— saper gratificare ogni tentativo del bambino anche se non riuscito;
— non trasmettere la propria ansia al bambino che sbaglia, senza però suggerire parole o indicare strade per la soluzione.

Tutto questo permetterà poi una diagnosi più attendibile della situazione.

INTRODUZIONE

Nei programmi del 1955 la geometria veniva considerata come un insieme di definizioni a partire da quelle degli enti più astratti (punto, linea, ecc.) che si ritenevano necessarie per individuare le proprietà delle figure geometriche e in seguito per imparare le regole delle aree e dei perimetri. In definitiva, la geometria si limitava ad una serie di regole necessarie per risolvere problemi di misura. Una tale geometria si poteva introdurre soltanto quando si riteneva che il bambino potesse dare definizioni e soprattutto quando avesse acquisito la nozione relativa al sistema metrico decimale.

I programmi attuali prendono atto dell'evoluzione subita dalla geometria euclidea nel corso dei secoli e cioè della geometria proiettiva e della topologia. Gli studi di Piaget, di Lapierre, di Aucouturier, Bruner e altri hanno messo in evidenza come in realtà, nello strutturare lo spazio, il bambino si impadronisca molto presto di concetti propri della topologia (dentro/fuori; aperto/chiuso) e che soltanto in seguito sia in grado di individuare le caratteristiche delle figure geometriche e di stabilire, tra figure di forma diversa, le relazioni di equivalenza, che sono il presupposto del concetto di «area».

In questa ottica deve essere considerata l'introduzione della geometria nel primo ciclo e il valore che essa assume nello sviluppo delle capacità di base.

I
PRIME ESPERIENZE NELLO SPAZIO AMBIENTE

1. Lo sviluppo psicogenetico dello spazio ovvero per una geometria costruttiva e sue implicazioni didattiche

Tutte le nostre esperienze sono immerse in uno «spazio» e in un «tempo», senza i quali non ci sarebbe attività e pensiero. Sebbene sia importante imparare a dominare lo spazio e il tempo, per un lungo periodo non ci si è preoccupati di studiare come nella mente del bambino questi concetti si andassero strutturando e come si potesse giungere alla padronanza di essi. Ormai è un dato acquisito che è un processo lungo e laborioso che si sviluppa a partire dal proprio corpo fin dalla nascita (interessante è il confronto tra le concezioni di tempo e spazio dei bambini e quelle di alcuni popoli) e che raggiunge un certo grado di maturità verso i 9/10 anni. Esso, però, è in continua evoluzione; infatti i nostri concetti si ampliano e si approfondiscono con l'aggiunta di nuove esperienze e il fatto che le nozioni di spazio e di tempo non sono neppure dall'adulto completamente dominate lo si verifica quando egli si trova in situazioni nuove o di stress.

Piaget e i suoi collaboratori hanno dato un importante contributo al problema della genesi delle strutture spazio-temporali nella mente umana. Per Piaget spazio e tempo sono le strutture attraverso cui noi percepiamo e concepiamo gli oggetti. Egli distingue lo *spazio senso-motorio* dallo *spazio rappresentativo.* Il primo, il bambino lo costruisce dalla nascita fino ai 18 mesi, il secondo dai 18 mesi fino ai 9/10 anni. Sebbene nei primi due anni di vita costruisca sul piano senso-motorio i *rapporti topologici* e poi quelli *proiettivi* e *metrici,* egli impiega un lungo periodo a ricostruire tali rapporti sul piano dello spazio rappresentativo.

Piaget afferma che lo spazio che noi percepiamo è dovuto alla specificità dei nostri sensi. Il bambino rappresenta dapprima le caratteristiche più primitive ed evidenti: quelle topologiche. La teoria di Piaget è importante perché ha fatto capire che un processo così complesso non si deve lasciare esclusivo dominio della spontaneità e del vivere quotidiano.

È bene sottolineare che gli studi di Piaget riguardano lo sviluppo psicogenetico dello spazio e non le sue implicazioni didattiche e quindi spesso sono stati mal interpretati. «Pro» o «contro» Piaget è bene puntualizzare che — anche se la geometria si è interessata dapprima dello spazio euclideo e solo molto più tardi di quello proiettivo e topologico — il bambino, sul piano della rappresentazione dello spazio, segue il percorso inverso. Infatti ciò che è banale, evidente e intuitivo è più difficile da strutturare nel momento in cui si vuole generalizzare.

Le implicazioni didattiche che l'insegnante può trarre dagli studi di Piaget sono essenzialmente due:

— essendo il pensiero geometrico costruito su un sistema di azioni interiorizzate, non è conveniente addestrare gli alunni con metodi soltanto visivi e verbali. In tal modo, l'allievo impara «meccanicamente» alcune nozioni, ma non è capace di trasferirle in contesti diversi da quelli abituali, come troppo spesso gli insegnanti lamentano;

— perché il bambino passi dall'azione al pensiero rappresentativo e da questo alla riflessione occorrono graduali e molteplici «esperienze».

2. I giochi nello spazio ambiente

Si è detto che il bambino deve agire per imparare. Quali sono le prime esperienze spaziali del bambino se non i giochi?

Purtroppo si risente nell'insegnamento della mancanza sempre crescente dei cosiddetti *nursery games* (ad esempio, occhio occhio bello, piazza bella piazza) e in generale dei tradizionali giochi all'aperto e al chiuso. In realtà, dietro a giochi sempre più costosi si nasconde una disattenzione sempre più allarmante della società e della famiglia verso le «vere esigenze» del bambino. È indiscutibile l'importanza educativa dei giochi se è vero che: «È nel giocare e soltanto mentre gioca che l'individuo, bambino o adulto, è in grado di essere creativo e di fare uso dell'intera personalità, ed è solo nell'essere creativo che l'individuo scopre il sé» (Winnicott, 1974, p. 76).

Nei programmi del 1955 si parlava di: «giuochi ed esercizi di esplorazione dell'ambiente mediante l'osservazione, secondo i due riferimenti fondamentali di tempo e di luogo, di idea intuitiva di successione delle generazioni, dei mutamenti e delle trasformazioni delle cose». Nei Nuovi Programmi si dice che:

> L'avvio allo studio della geometria va ricollegato, in modo naturale, ad una pluralità di sollecitazioni che provengono dalla percezione della realtà fisica. Sarebbe quindi oltremodo riduttivo limitare l'insegnamento di questo settore alla semplice memorizzazione della nomenclatura tradizionale e delle formule per il calcolo di perimetri, aree e volumi di figure particolari. Va favorita, invece, un'attività ricca e variata, prendendo le mosse dalla manipolazione concreta di oggetti e dall'osservazione e trascrizione delle loro trasformazioni e posizioni reciproche...

Un'attività geometrica intesa inizialmente come gioco può aiutare l'allievo a costruirsi le strutture di spazio e di tempo poiché nel gioco il bambino deve progettare ed eseguire azioni, la qual cosa può avvenire esclusivamente attraverso un'organizzazione delle «percezioni spazio-temporali».

I giochi nello spazio ambiente hanno allora stretta attinenza con la geometria. Attraverso di essi il bambino acquisisce le nozioni di direzione e verso, di successione, di ordine e di distanza che sono alla base delle successive conoscenze geometriche di riferimento, di trasformazione, di misura, ecc. Inoltre è indiscutibile la valenza socializzante del gioco. Esso può costituire il ponte tra il mondo della fantasia e quello del «lavoro scolastico». Può essere di aiuto far eseguire, all'inizio della prima elementare, giochi tradizionali ai bambini. Il maestro non deve, però, strumentalizzare a fini didattici i giochi spontanei dei suoi allievi, ma essere piuttosto un animatore che partecipa e guida a cogliere tutte le valenze logico-geometriche che il gioco offre.

L'allievo ha bisogno di manipolare e fare esperienze con tutto il proprio corpo per imparare i concetti. È bene che il bambino si appropri del suo spazio ambiente perché sia in grado di allargarlo sempre più, senza disorientarsi. Ma nell'acquisizione dello schema corporeo e nell'allargamento dei propri rapporti con il mondo esterno il bambino deve costruirsi nozioni di carattere geometrico: gli esercizi di educazione psicomotoria possono costituire ottime esperienze matematiche da affiancare ai tradizionali giochi.

In quest'ottica il primo insegnamento geometrico non è qualcosa «a sé», ma è da ricercare in tutte quelle «altre attività» che normalmente si svolgono nelle prime classi elementari. Però è bene, perché l'alunno rifletta su di esse, che dalle esperienze corporee si passi a rappresentare i giochi e gli esercizi motori con oggetti (fase manipolativa) e infine con disegni e schemi (fase grafica). In quest'ultima fase l'allievo gradualmente sentirà l'esigenza di comunicare e di generalizzare le singole situazioni e quindi di utilizzare simboli sempre più astratti.

Gli obiettivi di alcune esperienze corporee e di giochi sono:
— localizzare varie parti del corpo;
— orientarsi nello spazio rispetto a sé;
— acquisire concetti di direzione, verso, distanza, verso di una rotazione, ampiezze angolari;
— passare dalla misura arbitraria a unità di misura standardizzate ma non convenzionali;
— acquisire i concetti di percorsi equivalenti, nulli, inversi e minimi;
— codificare e decodificare messaggi verbali e visivi;
— migliorare e ampliare il proprio linguaggio; essere precisi nel dare istruzioni.

Interessante sarà far variare alcune regole del gioco abituale. Il vedere modificare una o più regole di un gioco di routine può risultare molto istruttivo se si pone l'attenzione sulle variazioni prodotte dal mutamento delle regole.

Passiamo in rassegna alcuni giochi tradizionali e attività che permettono di raggiungere gli obiettivi sopra indicati:

a) *nursery games*. Aiutano il bambino piccolo a rafforzare la capacità di localizzare le varie parti del proprio corpo;

b) *girotondi* e altri *giochi cantati*. Propri della prima infanzia, abituano al ritmo e sviluppano la coordinazione motoria e la sincronizzazione dei movimenti;

c) giochi di *localizzazione*. Sono giochi, come ad esempio lo scultore, la creta e il modello, in cui è necessario memorizzare la posizione degli arti e del corpo di un bambino che fa la parte del modello, per poi riprodurla, voltando le spalle al modello, su un oggetto passivo che funge da creta. Appartengono alla stessa categoria i giochi di ricomposizione di una figura, dato un modello: il tangram (cfr p. 94), il mosaico, il puzzle. Altri tipi di attività da proporre possono essere: ritrovare il proprio posto tra i compagni ordinati; ritrovare tra una collezione di oggetti quello sottratto; i classici giochi di memory (trovare tra le carte coperte le coppie uguali);

d) giochi di *mira*. Tiro al bersaglio, palla prigioniera, l'appello dei condannati, il tiro ai cavalieri, ecc. abituano il bambino a tracciare idealmente la retta tra lui e l'oggetto da colpire, a dosare la

forza a seconda della distanza dell'oggetto da colpire, a valutare i cambiamenti di posizione dell'elemento da centrare quando questo è mobile;

e) giochi di *percorso libero*. Il gioco del treno, l'acchiapparella o gioco del gatto con le sue varianti, mosca cieca, nascondino, i maghi e le statue, drago, principessa e cavaliere aiutano il bambino a orientarsi, a valutare le distanze, a rispettare le regole, a usare parole simbolo. Inoltre, drago, principessa e cavaliere e mosca cieca sono anche giochi percettivi, poiché il fanciullo deve individuare la sorgente sonora;

f) giochi di *percorso stabilito*. Il percorso può essere circolare e allora abbiamo, oltre ai già ricordati girotondi, il gioco della botta, della stella agitata, delle sedie musicali. Sono giochi interessanti perché permettono all'allievo di cogliere la differenza tra verso orario e antiorario, la coincidenza del punto di arrivo e di partenza, la differente lunghezza di percorso. Per meglio riflettere su questi concetti è utile la rappresentazione grafica del gioco. Il percorso può essere sempre una linea chiusa, ma con diversi nodi (intersezioni) come nello slalom, la gincana. Il percorso può essere anche rettilineo e allora si hanno numerosi giochi: pizza ricotta Oreste bum, i quattro cantoni, ruba bandiera, le diverse corse semplici e a ostacoli, con sacchi, con bambini legati, a tre con il bambino centrale che cammina all'indietro, con palloni o cucchiai da non far cadere, a quattro zampe, a carriola, salto alla cavallina, le staffette, ecc. Con tali giochi il bambino può cogliere la differenza tra direzione (rappresentata da una corda o fettuccia) e il verso visualizzato da una freccia, tra punto di partenza e arrivo, tra linea chiusa e aperta e, inoltre, si accosta al concetto di distanza;

g) giochi con *percorso guidato*. Il più conosciuto tra questi giochi è la caccia al tesoro. Una variante che abitua il bambino a decodificare e a codificare è quella che consiste nell'indicare il percorso con simboli stabiliti: frecce o lettere dell'alfabeto. Uno, due, tre stella e regina reginella sono due esempi di gioco in cui il percorso è stabilito, ma la velocità dello stesso è determinata da colui che dà le istruzioni. Inoltre il gioco regina reginella può avviare gli alunni al concetto di misura facendo notare come i passi siano del tutto arbitrari; se si gioca al chiuso, si possono determinare dei passi standardizzati misurando ciascun tipo di passo con le mattonelle. Il semaforo è un altro gioco di codifica e decodifica di messaggi visivi in verbali: giallo = cammina, verde = corri, rosso = fermati. Inoltre il semaforo, come il gioco di uno, due, tre stella, è un esempio di gioco di autocontrollo, molto utile. I giochi di percorso guidato hanno molte varianti: le istruzioni possono essere impartite per iscritto od oralmente, o determinate dal caso, lanciando due dadi (un dado con le facce di due o tre colori diversi indica le direzioni dello spazio, l'altro con numeri positivi e negativi indica il verso e il numero di passi da fare). Esempi di giochi con percorsi si trovano anche in altri settori: percorsi sulla tabella dei 100 numeri, percorsi su pavimento a piastrelle quadrate, su carta a quadretti, ecc.;

h) giochi misti: giochi sia di *localizzazione* che di *percorsi*. Nel gioco della campana si deve mandare la pietra dentro le caselle e si deve saltare non toccando le frontiere, ma si deve anche rispettare l'ordine delle caselle sia nel lanciare le pietre che nel saltare. Nel tiro alla fune si deve stare nella propria metà (indicata da una retta di separazione) e contemporaneamente cercare di tirare la metà fune avversaria nella propria regione. In tutti questi giochi, così come in quello dei cerchi, dove a ogni battuta di tamburello si entra nel cerchio con un salto a sinistra e si esce con un salto a destra, intervengono sia le nozioni di dentro/fuori, destra/sinistra, che di direzione e verso;

i) giochi di *costruzioni tridimensionali*. Al bambino piace «costruire» case, auto, navi spaziali, tende da indiano, ecc. adoperando oggetti comuni quali sedie, tavoli, cartoni, corde, coperte, cuscini, cassette di frutta. Dopo la costruzione, il gioco diventa imitativo poiché i bambini si divertono a inventarci sopra una storia. Ai bambini piace anche utilizzare materiale strutturato per costruzioni e ne esiste una grande varietà in commercio (Lego, Meccano, cubi di legno, fattorie, zoo, garage, mercati, ecc.). Sarebbe anche molto istruttivo e divertente costruire case in miniatura con materiale facilmente reperibile come legno, scatole da scarpe, mattoni, cartone. Nelle costruzioni grandi, i concetti di dentro/fuori sono riferiti al bambino stesso, mentre nelle costruzioni con materiale strutturato questi devono essere trasferiti ai vari pupazzi o oggetti considerati. In tutti i giochi proposti l'alunno deve confrontare e combinare forme, valutare angoli, scegliere le superfici che meglio si adattano tra loro, che stanno in equilibrio, racchiudere aree e volumi, usare nel modo migliore lo spazio e il materiale disponibile, separare le diverse regioni, tracciare itinerari, fare calcoli e distribuzioni. Inoltre, nel costruire con modelli, egli deve passare dallo spazio bidimensionale a quello tridimensionale e quindi deve essere in grado di cogliere le misure della terza dimensione da un disegno in prospettiva;

l) giochi di *travaso*. Con l'acqua, con la sabbia e tanti contenitori graduati e non, l'allievo acquisisce molteplici nozioni geometriche (volume, peso, capacità e prime stime), fa esperienze di

conservazione di quantità continue e inoltre si abitua alla precisione manuale;

m) esercizi *motori*. Nel movimento libero dei bambini in uno spazio chiuso si può notare come essi pian piano si approprino di tutto lo spazio disponibile e come il movimento che si viene a creare sia quello migliore per occupare tutto lo spazio. Giocando con palle, cerchi e oggetti di varia forma e dimensioni e di materiali diversi l'alunno esplora e, così, si accorge che per ogni funzione esiste una forma e un materiale migliore. Con le corde il bambino fa esperienza di lunghezze, mentre con l'asse di equilibrio fa esperienza di coordinamento, di simmetria, di autocontrollo.

II
LA GEOMETRIA DEL LEGGERE E DELLO SCRIVERE

1. Lo spazio grafico

Abbiamo parlato, nelle pagine precedenti, delle esperienze ludiche che il bambino fa nello spazio ambiente, esperienze di fondamentale importanza per la formazione dei primi concetti geometrici. Parliamo ora dell'esplorazione dello spazio grafico, che ha inizio con i primi scarabocchi del bambino e acquista rilievo sempre più grande a mano a mano che procede la sua alfabetizzazione. Perché il bambino possa imparare a scrivere, deve essere in grado di orientarsi nel foglio di carta e di eseguire percorsi guidando, con movimento fine delle dita, lo strumento grafico (padronanza del gesto, coordinazione oculo-manuale).

Le attività che abitualmente si offrono ai bambini a questo punto del loro sviluppo consistono nell'esecuzione di grandi tracciati da operarsi facendo scorrere, con movimento sciolto (senza contrazioni), una matita morbida lungo una linea aperta o chiusa (cfr. fig. 1) disegnata dapprima dall'insegnante su un grande foglio (de Ajuriaguerra, 1971).

È da notarsi che attività di questo genere aiutano il bambino sia a coordinare l'occhio con la mano e a trovare un movimento agevole ed economico del braccio, sia a cogliere caratteristiche delle linee che, attraverso l'uso esclusivo della vista, sarebbero senza dubbio sfuggite alla sua osservazione.

I problemi relativi all'organizzazione della pagina sorgono già con i primi disegni dei bambini (può accadere che il desiderio di disegnare una figura grande mal si accordi con le dimensioni del foglio; c'è chi, inoltre, evita il bordo sinistro concentrando tutti i segni grafici verso il bordo destro, oppure chi li concentra verso il bordo in basso), ma indubbiamente prendono grande rilievo con l'alfabetizzazione, e si sommano a quelli relativi all'orientamento del foglio.

Il foglio su cui il bambino disegna può essere ruotato sul piano del tavolo.

I piccoli lo fanno di frequente e, ad esempio, dovendo disegnare un girotondo, ruotano il foglio in modo da poter rappresentare agevolmente tutti i partecipanti al gioco (i piedi restano all'interno del cerchio su cui si trovano le mani unite, mentre le teste sono disposte all'esterno).

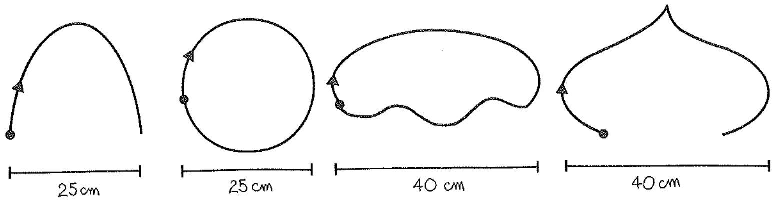


Figura 1

I segni alfabetici, però, hanno un orientamento preciso e vanno distribuiti sulle «righe», che sono linee parallele. L'abitudine ad assumere, nello scrivere, una determinata posizione del corpo e una relativa immobilità rispetto al piano grafico contribuiscono a portare a un orientamento ben determinato del foglio. Col crescere del bambino e col procedere della alfabetizzazione la rotazione del foglio su cui si scrive diventa un gesto poco spontaneo: destra/sinistra e alto/basso diventano direzioni ben determinate.

Ma parliamo ora delle lettere alfabetiche per le quali non è sufficiente il saperle riconoscere: occorre anche trovare il punto di partenza e il verso di percorrenza per poterle tracciare agevolmente in quanto, in realtà, sono dei percorsi orientati (cfr. fig. 2).

A questo punto, naturalmente, sarà opportuno offrire di nuovo ai bambini un'attività analoga a quella proposta tracciando linee aperte o chiuse. Nella figura 2 sono indicate le misure.

Le lettere alfabetiche, però, per costituire una parola, devono essere concatenate una all'altra, secondo *un ordine* ben preciso. Da una sequenza temporale di suoni si deve passare a una sequenza spaziale di segni. Perché impari agevolmente a scrivere (e a leg-

gere), al bambino è necessaria una buona strutturazione spazio-temporale, nonché la capacità di organizzare il movimento che guida lo strumento grafico. Si suggeriscono, allo scopo, dei percorsi più complessi di quelli indicati fin qui, che abitualmente vengono chiamati «grandi progressioni» (cfr. fig. 3).

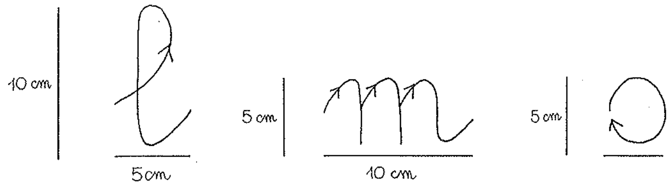


Figura 2

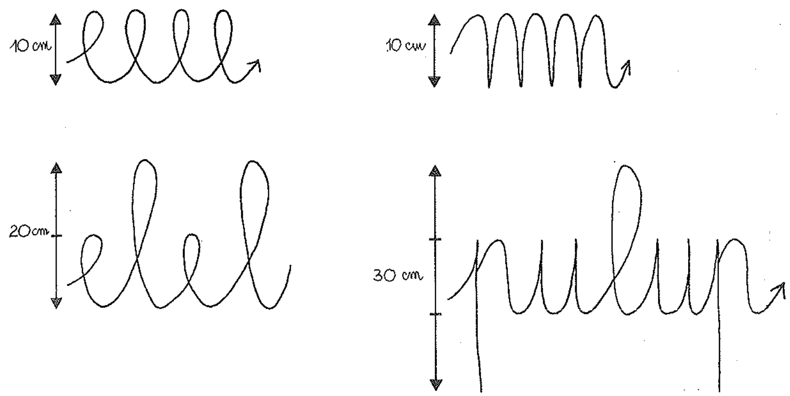
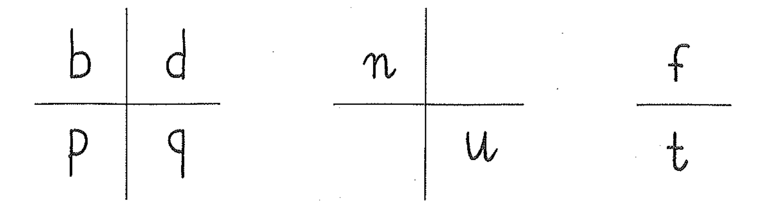


Figura 3

Le lettere alfabetiche sono figure un po' insolite per il bambino: esse hanno un preciso orientamento e possono subire solo traslazioni per non variare significato. Pertanto, la simmetria assiale o centrale o la rotazione sono fondamentali per distinguere i segni alfabetici l'uno dall'altro (cfr. fig. 4).

Quando imparano a scrivere, per la prima volta i bambini incontrano figure di tal genere. L'immagine di un animale, nel suo profilo destro, nel suo profilo sinistro, rappresenta sempre lo stes-



Simmetrie assiali
o centrali o rotazioni

Rotazioni
o simmetria centrale

Simmetria assiale

Figura 4

so animale. Ciò accade anche per quanto riguarda immagini di figure umane o di gran parte degli oggetti di vita quotidiana. È dunque opportuno, fin dai primi mesi della scuola elementare, offrire ai bambini esperienze che li portino a distinguere figure simmetriche. Lo specchio e lo specchio magico (cfr. p. 65) possono essere utili strumenti a tale scopo. L'uso di carta carbone, i giochi con macchie di colore sulla faccia interna di un foglietto di carta piegato, i giochi di piegatura e ritaglio della carta possono offrire esperienze piacevoli, ma anche importanti.

III
LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

1. Aspetti generali

È noto che la geometria è nata da esigenze pratiche e che fu Euclide, più di 2000 anni or sono, a riorganizzare le idee per ottenere un tutto organico, logico e coerente. Alla base della geometria, egli pose alcune definizioni che introducono gli enti geometrici e descrisse poi le proprietà delle figure in una loro visione statica.

A partire dal secolo scorso si cominciò, invece, a fissare l'attenzione sulle proprietà delle figure non più viste nella loro staticità ma considerate nella possibilità di mutarsi l'una nell'altra mediante trasformazioni continue: le *trasformazioni geometriche*. Per procedere secondo questa nuova linea si è modificato sostanzialmente il concetto di uguaglianza introducendo quello di congruenza, che è uno dei più importanti concetti della geometria. Così si definiscono *uguali-congruenti* due figure quando da una si può ottenere l'altra mediante una determinata trasformazione. È questo il concetto di uguaglianza relativa alla trasformazione desiderata in contrapposizione all'uguaglianza assoluta ovvero all'identità che vede ogni figura uguale solo a se stessa.

L'inquadramento logico dell'insegnamento della geometria in una visione dinamica, volta a cogliere ciò che varia e ciò che si conserva di una figura soggetta a una trasformazione, fu presentato per la prima volta nel 1872 da Felix Klein.

Si parla così di trasformazioni geometriche *isometriche* o isometrie se un segmento e il suo corrispondente hanno uguale lunghezza e se due angoli corrispondenti (omologhi), sono della medesima ampiezza. Esse, quindi, mantengono la forma e l'estensione delle figure trasformate, ma esistono anche trasformazioni che mantengono la forma ma non l'estensione (ingrandimenti, riduzioni) o trasformazioni dove non è possibile stabilire alcun rapporto metrico (*trasformazioni topologiche*), come nel caso del disegno su un palloncino che viene gonfiato. Altre trasformazioni sono quelle in cui non si mantiene il parallelismo delle rette ma a un poligono corrisponde sempre un poligono con lo stesso numero di lati (*trasformazioni proiettive*): ad esempio, l'ombra di un oggetto posto davanti a una sorgente luminosa.

2. Le isometrie

Le isometrie sono movimenti rigidi perché avvengono senza deformazione della figura trasportata; infatti, modificano solo la posizione della figura nello spazio. Esemplifichiamo con un esperimento. Su un foglio di carta si disegni una figura qualsiasi S. Disponendo sul nostro foglio un secondo foglio translucido sarà semplice riprodurre su di esso la figura S; spostando a piacimento il secondo foglio sarà possibile avere ulteriori riproduzioni della figura S in altre parti del foglio e in altre posizioni senza che essa subisca deformazioni. Abbiamo eseguito un movimento rigido che non altera né la grandezza né la forma della figura S; esse rimangono pertanto *invariate*.

Questo esperimento ci fa osservare che il movimento a cui è stata sottoposta la figura S fa corrispondere a due suoi punti qualunque A e B sul disegno «originario» altri due punti A' e B' sul foglio translucido mantenendo inalterate le distanze, in modo cioè che risulti $AB = A'B'$. Se sostituiamo al foglio il piano, di cui il foglio è un «modello», si può dire che un movimento rigido permette di stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano che lascia invariate le distanze: tale corrispondenza si chiama *isometria* o *congruenza*. Quindi, due figure sono congruenti se esiste un movimento rigido che porta l'una a sovrapporsi all'altra.

Si può fornire una definizione generale: si chiama isometria un'applicazione *biiettiva* del piano in sé che conserva le distanze, cioè tale che a ogni coppia di punti A, B del piano fa corrispondere una coppia di punti A', B' del piano stesso in modo che sia

$$d(A,B) = d(A',B')$$

dove: $d(A,B)$ è la distanza di A da B.

Una isometria non cambia le distanze, cambia solo le «posizioni». Con l'uso di due fogli, uno fisso e l'altro mobile, si può vedere come è possibile stabilire una isometria sul piano che trasforma la figura S in S'. Sul foglio fisso sono disegnate S e S' e sul foglio mobile è tracciata la figura S che dovrà essere sovrapposta a S'.

Un esperimento analogo permette di verificare che esiste una isometria inversa che porta S' in S; quando si opera, quindi, su un piano con una isometria e successivamente con la sua inversa i punti del piano rimangono nella medesima posizione, si ha cioè una isometria che lascia invariati tutti i punti del piano: tale isometria si chiama *identità*.

Si possono concludere queste brevi note iniziali esplicitando che, date 2 figure S e S' congruenti, una isometria è tale che:

- l'isometria inversa di quella assegnata porta ogni punto di S' in un punto di S;
- la composizione di una isometria con la sua inversa è l'identità;
- l'isometria che lascia fermi tutti i punti del piano è l'identità.

3. La traslazione

Torniamo ai movimenti sul foglio translucido. Un modello concreto di traslazione nel piano si ottiene con il «solito» foglio translucido che viene fatto scorrere su un foglio bianco secondo una direzione fissata.

In essa, ogni punto P del piano si trasforma in un punto corrispondente P': risulta costante la distanza tra coppie di punti corrispondenti e rette corrispondenti (AC e $A'C'$, AB e $A'B'$, ecc.) sono parallele.

La *traslazione* è una corrispondenza che gode delle seguenti proprietà (cfr. fig. 1):

- coppie di punti (AA' e BB') corrispondenti giacciono su rette parallele;
- mantiene invariata la distanza tra punti;
- non possiede punti uniti (che restano «fermi»);
- ogni retta è trasformata in una retta parallela.

Una traslazione è individuata dalla lunghezza, dalla direzione e dal verso del segmento che unisce due qualsiasi punti corrispondenti (P e P').

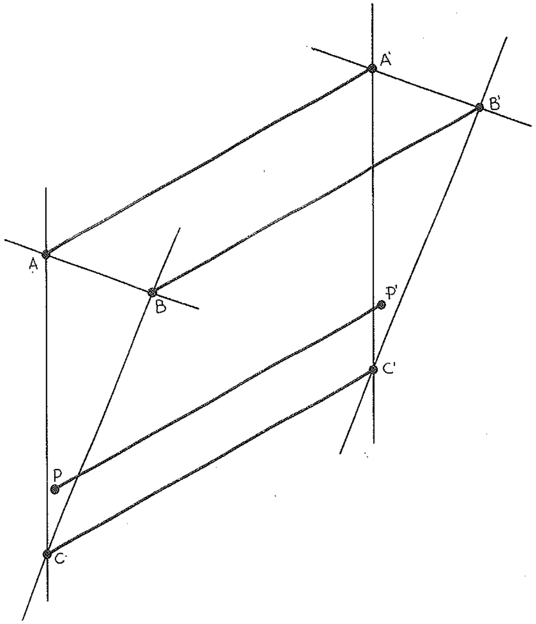


Figura 1

4. La rotazione

Utilizzando due fogli, uno bianco e l'altro translucido, bloccati fra di loro con una punta in modo che possano ruotare uno sull'altro si può realizzare un modello di rotazione; in essa ogni punto P si trasforma in un punto P' che mantiene invariata la distanza dal centro.

Esplicitiamo che la rotazione è una corrispondenza che ha le seguenti caratteristiche (cfr. fig. 2):

- possiede un punto unito, il centro di rotazione;
- mantiene invariate le distanze dal centro di ogni coppia di punti corrispondenti;
- sposta tutti i punti del piano di uno stesso angolo ($A\hat{O}A' = B\hat{O}B'$);
- avviene in uno dei due versi possibili (verso orario oppure antiorario);
- mantiene la distanza tra coppie di punti ($AB = A'B'$, ...).

Dunque una rotazione risulta individuata da tre diversi elementi: il *centro di rotazione*, l'*ampiezza dell'angolo*, il *verso di rotazione*.

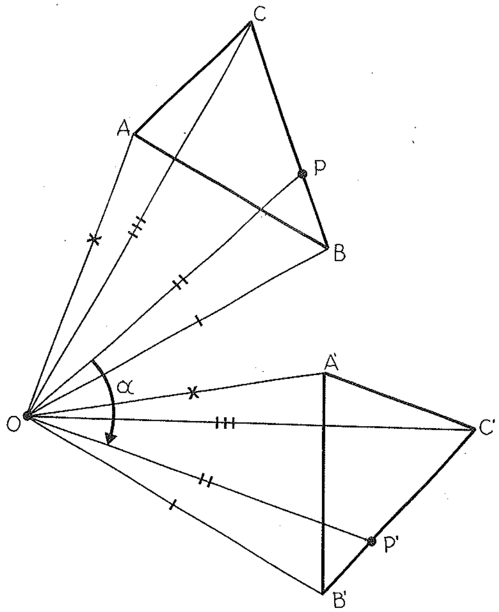


Figura 2

5. La simmetria centrale

Fissato in un piano il punto O si consideri un punto P distinto da O e si tracci la retta r passante per P e per O: osserviamo che il punto O divide r in due semirette; su quella non contenente P fissiamo un punto P' in modo che sia $OP = OP'$. Resta quindi fissata un'applicazione del piano che a ogni punto P fa corrispondere un punto P' e viceversa, in modo che sia $OP = OP'$ e che i punti POP' siano allineati. Al punto O si fa corrispondere il punto stesso (cfr. fig. 3). Pertanto la simmetria centrale è una corrispondenza per la quale valgono le seguenti proprietà:

- mantiene invariata la distanza fra coppie di punti;
- possiede un punto, O, che corrisponde a se stesso;
- possiede infinite rette che vengono trasformate in se stesse (non si tratta però di insiemi di punti che restano fermi nella trasformazione, perché ogni semiretta viene trasformata nella sua opposta);
- applicata due volte di seguito dà l'identità.

La simmetria centrale risulta quindi una particolare rotazione di ampiezza 180 gradi.

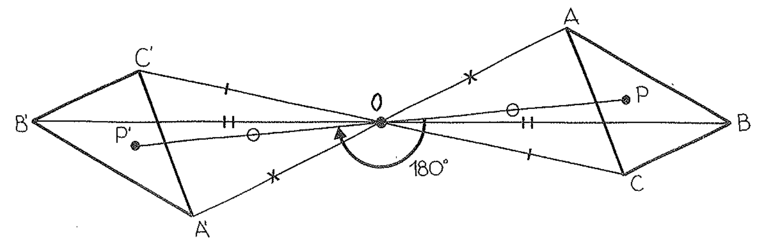


Figura 3

6. La simmetria assiale

Continuiamo a fare esperimenti. Ripieghiamo su se stesso un foglio translucido; esso costituisce un modello di due semipiani π e π' opposti di cui la piegatura rappresenta la frontiera; possiamo riprodurre una figura disegnata su π in π' e viceversa. Riaprendo il foglio (cfr. fig. 4) si può constatare che le figure S e S', che si trovano sui due semipiani, sono simmetriche rispetto alla linea di piegatura; si può intuire l'esistenza di una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto del semipiano π un punto del semipiano π' e viceversa.

Si può verificare che le distanze vengono mantenute e che anche tale trasformazione è un'isometria. Essa lascia fermi tutti i punti della linea di piegatura. Tale isometria si chiama *simmetria assiale* e la retta *a* di piegatura *asse di simmetria*.

Alla costruzione di una simmetria assiale descritta precedentemente che porta a uscire dal piano (piegando il foglio nello spazio) corrisponde una costruzione grafica, realizzata nel piano, ricordata nella figura 4. Esplicitiamo che assegnata sul piano la retta *a*, si chiama *simmetria di asse a* una isometria che ha le seguenti proprietà:

— lascia fermi (o uniti) tutti i punti di *a*;
— trasforma ciascuno dei semipiani di cui la retta *a* è frontiera nell'altro;
— applicata due volte di seguito dà l'identità, cioè è inversa di se stessa.

7. Riepilogo sulle trasformazioni

La dipendenza tra i vari tipi di trasformazioni geometriche, secondo l'interpretazione di F. Klein, si può visualizzare nel dia-

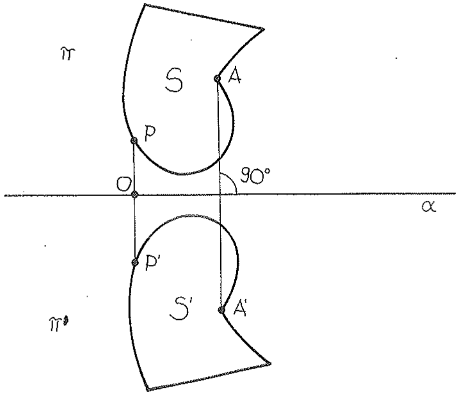


Figura 4

gramma di Venn (cfr. fig. 5). Questo evidenzia come le isometrie, che sono le trasformazioni che conservano un numero maggiore di proprietà tra le figure e le loro trasformate, sono incluse nelle altre che risultano via via più generali cioè meno dotate di *proprietà invarianti*. La traslazione, la rotazione e la simmetria centrale sono isometrie che si realizzano muovendo le figure nel piano in cui si trovano e sono dette *isometrie dirette* (si conserva il loro orientamento nel piano). Le simmetrie assiali (o ribaltamenti) invece sono ottenute con movimenti nello spazio in cui il piano delle figure è immerso e sono dette *isometrie inverse* (non mantengono l'orientamento nel piano). Comunque, in esse, la posizione iniziale e quella finale della figura giacciono nello stesso piano.

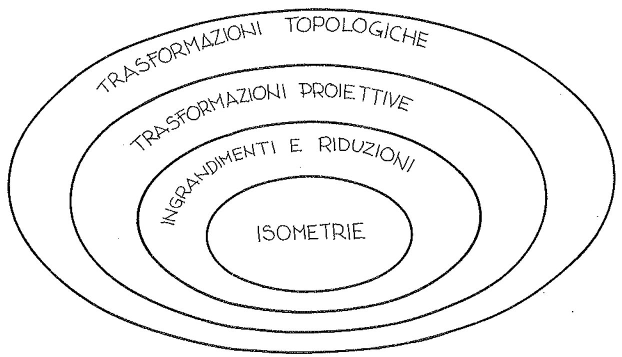


Figura 5. Diagramma di Venn.

IV

LA MISURA

1. Alcune considerazioni sui processi di apprendimento

Misurare è uno degli atti più comuni della nostra vita di ogni giorno: misuriamo pesi, lunghezze, superfici, tempo, velocità, temperature, ecc. Continuamente ci vengono fornite nel nostro ambiente informazioni su misure; spesso noi stessi comunichiamo agli altri i risultati relativi a una nostra attività di misurazione, tuttavia abbiamo interiorizzato in maniera così profonda il processo che ci permette di compiere tali operazioni che quasi sempre esse assumono l'aspetto di un automatismo. Non abbiamo più la coscienza delle lunghe e complesse esperienze che ci hanno condotto alla completa padronanza delle molteplici abilità che sono necessarie anche per compiere la più semplice attività di misura.

Quando, però, gli insegnanti hanno il compito di creare per gli alunni un ambiente che favorisca la corretta acquisizione di queste abilità o il superamento di ostacoli ed errori sistematici, può risultare interessante e utile riflettere per cercare di individuare i complessi passaggi che è necessario compiere.

Prima di addentrarci in considerazioni psicologiche e pedagogiche, è necessario riflettere su alcuni elementi evidenziati da Dienes e Golding (1966, p. 41):

I fatti e gli avvenimenti che osserviamo nella natura possono, da un certo punto di vista, essere classificati in due categorie: quelli che sono *continui* e quelli che sono *discontinui*. Per esempio, quando si conta quante mele vi sono in un paniere il passaggio da una mela che si conta alla seguente non è continuo (è un modo di contare *discreto*). Lo stesso per quanto riguarda i passi che si fanno per la strada... Invece molti fenomeni della natura ci appaiono come continui: lo scorrere del tempo, la crescita di una pianta, lo spostamento nello spazio, ecc. La misura o il contare avvenimenti discontinui offrono poca difficoltà, ma non è lo stesso per gli avvenimenti continui. Come misurare la crescita? Come sapere che una cosa è più grande di un'altra? Come misurare la fuga nel tempo? Naturalmente il bambino risolve spesso queste questioni con un semplice sguardo... soprattutto quando è molto piccolo si tira fuori da situazioni di questo genere con l'aiuto dei sensi. Non gli è necessaria l'analisi. Viene un momento, comunque, dove la necessità di una misura si fa sentire.

È evidente che per il bambino il discorso sulla misura è legato a quello dell'interpretazione di una realtà esterna a sé e quindi è indispensabile che egli sia in grado di creare un rapporto tra sé e il mondo, che sappia operare delle stime, dare dei giudizi a priori e confrontare il proprio giudizio soggettivo con dei dati esterni.

Inoltre, l'acquisizione della capacità di operare misure, oltre che lenta e graduale, presuppone lo sviluppo parallelo di molteplici capacità di tipo manipolativo, interpretativo, cognitivo e simbolico, ed è il risultato di molte e varie attività proposte dall'insegnante con una diversa gradualità nel corso di tutto il ciclo della scuola elementare. Nell'ambito dei suoi studi sulla genesi e sullo sviluppo delle strutture dell'intelligenza, Piaget ha affrontato anche il problema dell'acquisizione da parte del bambino delle capacità relative alla misura. Anche se va chiarito che l'interesse di Piaget non era rivolto ai processi di apprendimento e che, quindi, i risultati delle sue ricerche e dei suoi studi non possono essere trasferiti direttamente nell'ambito didattico, tuttavia può essere interessante conoscere tali risultati per riflettere sul modo e sui tempi in cui si strutturano nella mente del bambino le capacità di cui ci stiamo interessando e per avere un riferimento rispetto all'osservazione e alla valutazione del processo di apprendimento dei singoli alunni.

Relativamente alla misurazione di grandezze spaziali, Piaget osserva che (Petter, 1978, pp. 130 e 143):

la misurazione diretta consiste nella fusione di due operazioni, reali o mentali: la *divisione* e lo *spostamento*; la *divisione* di una grandezza data, per esempio un segmento di retta, in tante parti uguali, mediante *spostamento* iterativo della prima di queste parti, *scelta come unità*, sulla porzione restante del segmento. Presuppone, dunque, operazioni più elementari, cioè la rappresentazione o la esecuzione, ma con anticipazione mentale, della «segmentazione» o «partizione» della grandezza da misurare e la rappresentazione e coordinazione degli spostamenti, cioè delle successive modificazioni di posizione della unità di misura...

Le operazioni di misura di una grandezza lineare sono dunque il risultato di un lungo processo di elaborazione, anche se, per un adulto, sia la partizione di un intervallo da misurare (lunghezza, distanza), che lo spostamento iterativo di una lunghezza scelta come unità sembrano procedimenti del tutto naturali. Ma non è affatto naturale rompere una lunghezza in parti quando queste non sono percettivamente date, o spostare queste ultime col pensiero, quand'esse sono collegate l'una all'altra secondo posizioni determinate.

2. Confronti e ordinamenti

Le operazioni relative alla misura presuppongono sempre la capacità di operare confronti e ordinamenti. Dati un insieme di oggetti e una relazione d'ordine (ad esempio, «essere più corto», «avere superficie maggiore», «essere più scuro», ecc.), si tratta di ordinare gli elementi considerati in base alla relazione data. Normalmente si arriva a ordinare un insieme di oggetti, ad esempio dal meno pesante al più pesante, confrontandone prima una coppia e stabilendo quale dei due è più leggero e ripetendo questo confronto a coppie fino a esaurire tutti gli oggetti così da poter stabilire qual è il primo della serie.

La stessa operazione si ripete effettuando confronti a coppie tra gli oggetti rimanenti fino a stabilire qual è il secondo della serie e così via. Implicitamente si sfrutta il fatto che tutte le relazioni d'ordine sono *antisimmetriche* (cioè, riferendoci all'esempio, se l'oggetto A è più leggero dell'oggetto B, allora l'oggetto B non è più leggero dell'oggetto A) e *transitive* (cioè se A è più leggero di B e B è più leggero di C, allora A è più leggero di C). Vari sono i materiali che si possono usare per attività di ordinamento (sia di tipo qualitativo che quantitativo): rocchetti di filo dello stesso colore o di gradazioni diverse da ordinare dal più chiaro al più scuro, sassi da ordinare in base al volume, al peso, al colore o, ancora, in base alla ruvidezza della superficie, oggetti dello stesso volume (ad esempio, i contenitori delle pellicole fotografiche riempiti di materiali diversi) da ordinare in funzione del peso, ecc.

3. Spunti per la programmazione di un itinerario didattico

La complessità del processo delineato suggerisce di avviare i bambini al concetto di misura fin dal primo anno di scuola elementare, guidandoli attraverso esperienze che potrebbero essere chiamate «attività preliminari sulla misurazione». È consigliabile che gli insegnanti organizzino esercizi che riguardano la misura in modo da condurre contemporaneamente lo studio di diversi aspetti: distanza, tempo, peso, ecc. Questi esercizi dipenderanno dal livello raggiunto dai bambini circa la conoscenza del numero. Non è, tuttavia, indispensabile che essi abbiano maturato una comprensione esaustiva della dimensione cardinale e ordinale. L'applicare gli aspetti del numero già acquisiti alla misurazione rinforza del resto la sua comprensione.

Alcuni giochi spontanei, quali acchiapparella, i quattro cantoni, regina reginella, si prestano molto bene allo scopo. Nel gioco di acchiapparella, ad esempio, i bambini sono spontaneamente portati alla valutazione delle distanze da ricoprire attraverso la corsa, per cui, dovendo tener conto di una serie di fattori (tra cui la propria resistenza fisica), potranno valutare tutta una serie di percorsi alternativi e, attraverso varie esperienze, saranno portati alla scoperta del percorso minimo. Il gioco regina reginella prevede che si coprano le stesse distanze in modo diverso, per cui i bambini sono portati a notare che non solo la lunghezza di un percorso, ma anche le modalità di percorrerlo modificano il risultato del gioco: così, facilmente, si scopre che una stessa distanza è preferibile percorrerla a passi «da leone» piuttosto che a passi «da formica», cioè un passo dietro l'altro.

Durante questo tipo di giochi i bambini si servono di termini di confronto semplici: più lungo, più corto, più vicino, più lontano, ecc.; occasione questa da sfruttare per perfezionare l'uso corretto di termini come lontano, vicino, basso, profondo, ecc. sia per renderli più significativi sia per passare da un uso più qualitativo a un uso sempre più preciso da un punto di vista quantitativo.

In seguito a discussioni in classe, guidate dall'insegnante, si possono realizzare disegni ai quali si possono aggiungere commenti anche suggeriti dai bambini stessi: «questa è una giraffa alta»; «questo è un grattacielo e i grattacieli sono alti», ecc. Nell'esempio citato *alto* è usato in senso *descrittivo*. Nel tentativo di aiutare i bambini a scoprire il significato *relativo* del termine alto, l'insegnante può chiedere loro di fare esempi di cose che potrebbero sembrare alte per un gigante o di cose che potrebbero sembrare alte per una formica, ecc.

Un'altra esperienza che può essere svolta in classe per avviare gli alunni all'acquisizione della capacità di misurare è la seguente: si danno ai bambini alcuni nastri colorati di diverse lunghezze e larghezze. Dopo aver lasciato giocare un po' i bambini con questo nuovo materiale, si può chiedere loro di disporre tutti i nastri in ordine di lunghezza, incominciando dal più corto. Finita questa prima operazione, si possono rimescolare i nastri e operare un nuovo ordinamento disponendo i nastri in ordine di larghezza e incominciando dal più sottile. Manipolando questo materiale i bambini scopriranno da soli che un pezzo di nastro può essere uno «strumento di misura» molto utile, infatti può essere usato nel senso della lunghezza e in quello della larghezza, può essere mantenuto teso e può essere curvato, ecc.

Il nastro si rivelerà molto utile e interessante qualora si invitino i bambini a usarlo per misurare parti del proprio corpo (la lunghezza del braccio, del piede, della mano, del naso; la circonferenza della testa, del polso, della vita, ecc.). I bambini si renderanno conto spontaneamente che il confronto di alcune misure del corpo si può fare direttamente (ad esempio, possiamo decidere chi è più alto semplicemente mettendoci uno di fianco all'altro) ma che per altre misure (ad esempio, la circonferenza del polso) è necessario ricorrere a uno strumento e, in questo caso, il nastro ha tutte le caratteristiche indispensabili per svolgere questa funzione.

Dopo aver distribuito i nastri, l'insegnante può invitare ciascun bambino a ricercare, all'interno della classe, oggetti lunghi come quello in suo possesso e a registrare su di un quaderno i risultati dell'esperienza. I bambini scopriranno, ad esempio, che alcuni oggetti, come la spalliera della sedia, la cartella, l'antina di un armadio, hanno la *stessa lunghezza* del nastro. Questo tipo di esperienza permette ai bambini di effettuare un'operazione di *confronto*, stabilendo una corrispondenza tra un oggetto dato e un campione di lunghezza, in questo caso il nastro prescelto.

Un'altra esperienza significativa è quella relativa alla valutazione delle dimensioni. È preferibile cominciare questi giochi in classe chiedendo ai bambini se credono che un certo mobile dell'aula (ad esempio, la scrivania) possa entrare in un certo spazio (tra due armadi). Si può verificare l'esattezza delle risposte sensa spostare i mobili riportando nello spazio indicato un pezzo di spago della stessa lunghezza.

Per avviare gli alunni all'attività di misurazione, i materiali messi a disposizione dall'insegnante saranno i più vari: potranno essere usate strisce di carta colorata di varie lunghezze, bastoncini, legnetti, matite, scatole, ecc. in modo da stimolare il bambino alla scelta opportuna dello «strumento» da usare a seconda dell'oggetto da misurare (il bambino scoprirà da sé che per misurare la lunghezza di una stanza sarà più conveniente usare un nastro lungo, mentre per misurare un libro oppure un oggetto di piccole dimensioni sarà più utile la scelta di una bastoncino, ecc.).

Le prime attività svolte in classe condurranno necessariamente a misure affette da errori e con scelte di unità arbitrarie. Solo in un secondo momento l'insegnante — attraverso l'osservazione e il confronto dei risultati diversi che si possono ottenere quando, misurando una stessa grandezza, si usano più strumenti e diverse unità di misura — cercherà di far scaturire nel modo più spontaneo possibile la necessità di rendere comunicabile e valutabile il risultato della misura di ciascuno. Nascerà, quindi, il bisogno di usare tutti una stessa unità di misura e questa sarà scelta anche in base a valutazioni fatte a priori circa l'ordine di grandezza: non sarà conveniente usare la stessa unità per il peso del proprio corpo e per quello di una figura ritagliata nel cartoncino, o per indicare la capacità di una damigiana e quella di una bottiglina di profumo. Inoltre, a partire da un certo livello di età, i bambini comprenderanno che per misurare occorre operare secondo regole ben definite e con un certo grado di precisione. In particolare, saranno portati ad affrontare due problemi: quello del rigore con cui va effettuata l'operazione del misurare e quello di adeguarsi, effettuando una misura via via più precisa, al grado di approssimazione richiesto.

È utile evidenziare che spesso i bambini, quando effettuano la misura di una lunghezza mediante un campione usato come unità, non eseguono in modo corretto lo spostamento iterativo dell'unità. Ogni operazione di misura presuppone l'uso di uno strumento soprattutto se, come è indicato nei programmi, l'introduzione delle grandezze e l'uso dei relativi procedimenti di misura vengono appresi in contesti esperenziali e problematici e in collegamento con l'insegnamento delle scienze. Naturalmente, il corpo è il primo «strumento» che ci permette di compiere in modo incredibilmente vario e flessibile non solo molte stime e valutazioni qualitative ma anche delle vere e proprie operazioni di misura.

Possiamo ad esempio confrontare il peso di due oggetti tenendoli ciascuno sul palmo di una mano o misurare lunghezze a passi, a spanne, ma presto appare più semplice, pratico e agevole riportare la lunghezza della propria spanna su una striscia di carta anche perché, volendo effettuare una misura più precisa, possiamo dividere la striscia di carta a metà, ancora a metà, ecc., e considerare sottomultipli sempre più piccoli della striscia stessa. Ma, naturalmente, questo sarà solo l'avvio per l'uso dei veri e propri strumenti di misura di tipo standard con preferenza per quelli più semplici e diffusi e che più facilmente possono essere usati direttamente dai ragazzi (bilance e bilancette di vario tipo, righe, righelli, metri rigidi e morbidi, bicchieri tarati, ecc.).

Sarà utile, come del resto consigliano i Nuovi Programmi, «una riflessione sulle unità di misura locali del passato e, dove permangono ancora, del presente, così come sulle unità di misura di altri popoli e di altri tempi, potrà servire a consolidare l'idea della convenzionalità del sistema in uso» (cfr. pp. 38-40).

Si può misurare approssimando il risultato all'unità, rimanendo quindi nell'ambito dei numeri interi, ma sicuramente nel corso dell'attività stessa nascerà da parte dei bambini l'esigenza di ottenere un risultato più preciso e di operare, quindi, con multipli e sottomultipli. Istintivamente, i bambini tenderanno a dividere l'unità (che sarà rappresentata, ad esempio, da una striscia di carta) a metà, poi ancora a metà, ecc., e quindi si useranno i mezzi, i quarti, gli ottavi, ecc. Solo in un secondo momento, anche attraverso l'uso degli strumenti standard di misura, si prenderà confidenza con l'uso dei multipli e sottomultipli decimali e si faranno esperienze relative all'uso del sistema metrico decimale e ci si avvierà all'utilizzo e all'interpretazione di misure convenzionali.

È evidente che misurare significa anche saper operare equivalenze.

Nell'uso di unità di misura convenzionali nei Nuovi Programmi si afferma:

> si raccomanda di uniformarsi alle norme del «Sistema Internazionale di Unità»... che tra l'altro prescrivono di posporre il simbolo («marca») al valore numerico in linea con esso, senza farlo seguire da un punto; si suggerisce anche di evitare esercitazioni con unità di misura scarsamente usate, ad esempio il miriagrammo.
>
> Quanto all'uso delle «marche» nella risoluzione di problemi, essendo inadatto a questo livello di età uno sviluppo sistematico dei calcoli dimensionali, è preferibile che esse non vengano riportate nelle indicazioni delle operazioni. È invece opportuno che accanto alle operazioni stesse si riporti una descrizione del procedimento nella quale si indicherà l'unità di misura di ciascun risultato man mano ottenuto.

4. La misura di superfici e volumi

Sembra interessante riflettere sulle esperienze che possono condurre i bambini a una corretta acquisizione dei concetti di superficie e volume e delle relative misure. Una prima attività consiste nell'usare rettangolini, piccoli tappi, gli stessi pezzi dei blocchi logici, del trimath e quadrimath per un semplice ricoprimento del piano. Questa attività precede le tassellazioni che permettono il riempimento del piano con forme geometriche seguendo regole stabilite (rotazioni, traslazioni e ribaltamenti). Le tassellazioni possono essere realizzate sistemando opportunamente le forme sul foglio, ripassando i contorni o colorando carte strutturate.

Le carte strutturate possono essere colorate a caso, o per rintracciarvi una certa figura, o secondo regole stabilite (Bernardi *et al.*, 1990b, Parte II).

4.1. *La figura campione*

«La misurazione di una superficie viene compiuta riportando un'altra superficie più piccola, scelta come unità di misura, sulla superficie da misurare» (Petter, 1978, p. 160).

Ci sembra quindi necessario a questo punto fare alcune riflessioni sulle caratteristiche di cui deve essere dotata la figura campione. Affinché una superficie possa essere usata a questo scopo è necessario che:

— ricopra il piano senza lasciare vuoti;
— sia scomposta facilmente in parti uguali.

Di fatto, nella storia, come unità di superficie è stato scelto il quadrato come forma e poi il metro quadrato come misura. Rispetto all'esagono, che «ricopre» il piano ma è divisibile facilmente in 2, 3, 6, 12 parti uguali, il quadrato offre maggiori possibilità. In particolare si può dividere ogni lato in 10 parti uguali e l'intera superficie in $10 \cdot 10 = 100$ quadratini uguali.

È opportuno perciò che i bambini facciano molte prove prima di riconoscere nel quadrato la figura geometrica ottimale.

4.2. *Articolazione del sistema di misura delle superfici*

«Nel calcolo della misura di una superficie vengono utilizzate invece grandezze lineari che vengono moltiplicate e non solo logicamente» (Petter, 1978, p. 160).

Attività propedeutica al calcolo della misura può essere considerato l'*ingrandimento* (ed eventualmente la *deformazione*) di una figura qualsiasi utilizzando la quadrettatura. Nella figura 1, *A* e *B* hanno la stessa forma ma *B* è ingrandita rispetto ad *A*. La figura *B* è stata ottenuta raddoppiando la lunghezza di ciascun lato. Calcolando in quadretti la superficie della figura *B* ci accorgiamo che essa è 4 volte la figura *A*. L'ingrandimento, infatti, è stato eseguito secondo due direzioni, verticale e orizzontale, perciò il rapporto tra la figura e la figura ingrandita è di 1 a 4. La stessa cosa avviene se si raddoppia il lato di un triangolo o di un quadrato. Attraverso queste attività è possibile stabilire il rapporto tra una figura e il suo ingrandimento, rapporto che procede secondo la progressione dei quadrati per cui se ingrandisco ciascun lato di 4 volte il rapporto è di 1 a 16, se ingrandisco di 10 volte è di 1 a 100. Tale è infatti il rapporto che esiste tra l'unità di superficie e i suoi sottomultipli (o multipli).

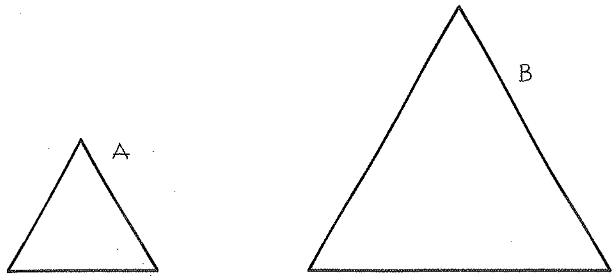


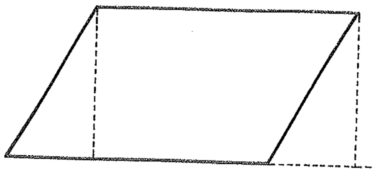
Figura 1

4.3. *Il calcolo dell'area*

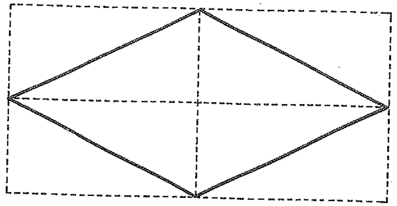
Calcolare le aree di figure geometriche è uno degli obiettivi elencati nei Nuovi Programmi che, d'altro canto, nelle indicazioni didattiche invitano a non insistere affatto sull'apprendimento mnemonico di regole e numeri fissi. È necessario, quindi, che il bambino «costruisca» le formule utilizzando le conoscenze precedentemente acquisite. L'area del rettangolo è la più semplice da realizzare. È consigliabile perciò trasformare in «rettangoli equivalenti» le figure geometriche delle quali si vuole trovare l'area (cfr. fig. 2). Le isometrie sono in questo caso di grande aiuto.

Bisogna tener conto del fatto che la misurazione diretta e il calcolo di una superficie o di un volume sono procedimenti psicologicamente piuttosto diversi l'uno dall'altro. Infatti, la misurazione di una superficie, ad esempio, può essere compiuta riportando sulla superficie da misurare un'altra superficie, più piccola, scelta come unità di misura; per il calcolo algebrico si utilizzano, invece, grandezze lineari che vengono tra loro moltiplicate e non solo composte logicamente.

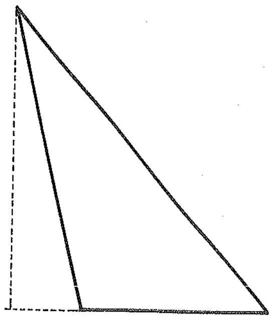
Per le attività di misura di volumi si potranno usare scatole e scatolette di diverse forme e dimensioni, cubetti, elementi delle



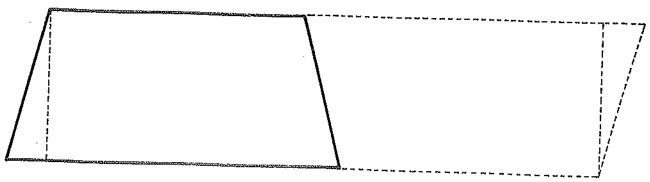
Il parallelogramma



Il rombo



Il triangolo scaleno



Il trapezio

Figura 2

costruzioni, moduli del Lego (per misurare le superfici, invece, si può ricorrere a triangolini, quadratini, rettangolini ritagliati su cartoncino, piccoli tappi, ecc.).

È utile fare particolare attenzione all'acquisizione del concetto di equiestensione rispetto all'area e alla distinzione tra *figure isoperimetriche* (di uguale perimetro) e *figure equivalenti* (di area uguale); le figure equivalenti nello spazio sono quelle di uguale volume. Utile a questo scopo è il lavoro con i polimini (cfr. pp. 58-59).

Si prenda in esame la figura 3: i bambini potranno realizzare, a partire da *a*, le varie configurazioni con successivi spostamenti dei quadratini elementari.

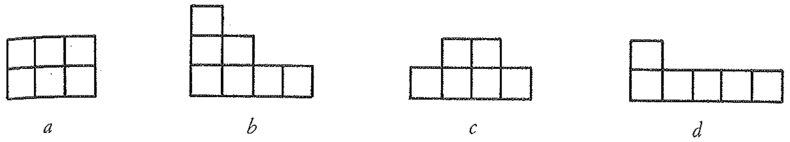


Figura 3

Risulta evidente che le figure rappresentate, pur essendo equivalenti (in quanto costituite dallo stesso numero di quadratini uguali), non hanno lo stesso perimetro. Infatti, percorrendo il bordo e contando i segmenti, si scopre che solo in *c* e in *b* si ha la conservazione del perimetro. Un'analoga attività può essere realizzata con cubetti considerando i volumi e le superfici laterali.

5. La misura degli angoli

Anche per quanto riguarda l'acquisizione della capacità di misurare angoli si potrà procedere attraverso esperienze e attività che, a partire da semplici valutazioni qualitative, condurranno il bambino, in modo graduale, a stime e confronti sempre più precisi, fino all'individuazione di una procedura idonea per misurare l'angolo in modo corretto anche attraverso la scelta dell'unità di misura più opportuna e dello strumento più adatto.

In molti giochi, che fanno parte dell'esperienza quotidiana dei bambini o che possono essere organizzati dall'insegnante nell'ambito della classe, si compiono giri completi attorno al proprio asse, si fa «dietro front», o si compie un quarto di giro verso destra o verso sinistra. Anche in molte attività espressive e motorie si fa esperienza di rotazioni e bisogna, a volte, compiere rotazioni precise per eseguire una danza oppure un esercizio di ginnastica. Ugualmente precise debbono essere le rotazioni (non solo nel verso, ma anche nell'ampiezza) quando si deve eseguire un percorso o quando il percorso lo esegue il compagno che fa la parte di un «robot» che compie i propri movimenti soltanto in base alle indicazioni date (Bernardi *et al.*, 1990b, Parte II).

Le rotazioni saranno ancora misurate in giri o in frazioni percettivamente significative del giro. Se nelle rotazioni con il proprio corpo non si baderà eccessivamente alla precisione delle misure, questa sarà richiesta in misura maggiore se si vorrà riprodurre il percorso su un foglio: ci si accorgerà, così, facilmente di tutte le difficoltà che ci sono a riprodurre in modo corretto ciò che, nell'esecuzione con il corpo, appare semplice e banale.

Eppure ci sono molte situazioni della vita quotidiana in cui, compiendo rotazioni, bisogna operare in modo preciso e molti sono gli oggetti di uso comune che ci permettono di valutare, misurare o compiere rotazioni di una data ampiezza essendo forniti di opportune scale numeriche: l'orologio, le manopole della radio, ecc.

Si potrà valutare, quindi, che frazione di giro compie una lancetta dell'orologio in un dato intervallo di tempo, oppure di quanto bisogna ruotare per spostarsi (in un dato verso) da una direzione all'altra su una grande rosa dei venti disegnata sul pavimento dell'aula o del cortile o, ancora, si potranno eseguire rotazioni di una data misura su manopole con graduazioni diverse.

L'esperienza di dividere l'angolo giro in tanti angoli uguali suoi sottomultipli può risultare semplice e particolarmente significativa attraverso le successive «piegature» di un foglio di carta. Si possono facilmente costruire l'angolo che corrisponde a mezzo giro, quello che corrisponde a un quarto di giro, quello che corrisponde a un sesto e così via, sempre con un grado di precisione accettabile. Si costruiranno così dei campioni con i quali sarà possibile confrontare le ampiezze di angoli dati e sarà facile fare esperienza del fatto che l'ampiezza di un angolo non dipende affatto dalla lunghezza dei lati: infatti, piegando allo stesso modo un foglio grande e un foglio piccolo ottengo angoli della stessa ampiezza anche se con lati di diversa lunghezza.

L'uso del grado (per non parlare dei suoi sottomultipli) sarà, naturalmente, un punto d'arrivo molto lontano nel tempo data la difficoltà di percepire e usare un'unità di misura così piccola e precisa. Ciò non impedirà di usare anche il goniometro convenzionale ma solo quando la misura richiede veramente un corrispondente grado di precisione. Sarà, comunque, bene che i bambini abbiano a disposizione vari tipi di goniometri (con diverse graduazioni e magari costruiti in classe) per poter scegliere quello più adatto al grado di approssimazione richiesto rispetto alla misura da effettuare. Un'attività interessante che potrà essere proposta dall'insegnante, una volta che i bambini abbiano già fatto una certa esperienza con le misure degli angoli, è quella di riprodurre in scala la pianta di una stanza o di un palazzo con gli angoli non tutti retti. Si porrà quindi il problema di misurare angoli senza poter usare il goniometro. Sarà facile intuire che, in taluni casi, si potrà usare un semplice foglio di carta da piegare in modo da ottenere un angolo sovrapponibile e, quindi, della stessa ampiezza di quello che bisogna riprodurre. Nel caso che non sia possibile usare questa strategia, si potranno utilizzare due asticelle, anche di lunghezza diversa, incernierate al centro, come strumento per ottenere un angolo uguale a quello che si sta misurando.

Anche attraverso questa esperienza si rafforzerà il concetto che la misura dell'angolo dipende dalla sua ampiezza e non dalla lunghezza dei suoi lati.

6. La misura del tempo

Ci sembra opportuno fare a parte delle riflessioni sulla misura del tempo, tenendo conto del modo del tutto specifico con cui si sviluppa nel bambino la capacità di orientarsi e operare misure rispetto a questa grandezza. Sapersi orientare nel tempo significa, tra l'altro, essere in grado di:
— stabilire la contemporaneità e la durata;
— individuare dei cicli e degli intervalli;
— riconoscere un ritmo;
— saper individuare, per ogni avvenimento, il precedente e il successivo;
— operare ordinamenti rispetto a fatti e a eventi;
— saper trasferire correttamente le metafore linguistiche relative allo spazio nell'universo degli eventi temporali.

È evidente, quindi, data la complessità del tema, che l'insegnante oltre a proporre specifiche attività didattiche, coglierà i molteplici spunti che gli verranno dall'insegnamento della storia e delle scienze, dalle attività motorie ed espressive, nonché dalla quotidiana esperienza di vivere tutti, insegnanti e bambini, non solo in uno stesso «spazio», ma anche in uno stesso «tempo».

Per quanto riguarda la capacità di individuare cicli e intervalli, di riconoscere un ritmo, di riprodurlo, di rappresentarlo, ci sono molte attività ludiche espressive ed espressivo-motorie: girotondi, filastrocche, danze, ecc.

Anche per quanto concerne la capacità di operare ordinamenti, si possono proporre ai bambini varie esperienze: ordinare vignette, disegnare in sequenza temporale gli avvenimenti di una giornata, ordinare foto della propria vita o relative a una particolare sequenza (ad esempio, le istruzioni per costruire un oggetto), ecc.

È opportuno che nel corso di queste attività si faccia uso di strumenti di misura molto semplici e magari scelti dai bambini stessi: un orologio a sabbia o ad acqua, un oggetto attaccato a un filo che funzioni da pendolo, un metronomo, ecc.

Per favorire l'acquisizione dei concetti di contemporaneità e di durata potranno essere organizzate varie esperienze. Ad esempio, si potrà chiedere a un bambino di compiere un'azione, come attraversare l'aula o il cortile della scuola, misurando il tempo che egli impiega. Dopo di ciò gli si può chiedere di elencare o compiere altre azioni che secondo lui hanno la stessa durata o di ripetere la stessa azione impiegando un tempo doppio oppure metà tempo. In questo modo la contemporaneità e la durata degli eventi acquistano per il bambino un maggior significato sul piano percettivo, in quanto egli ha la possibilità di confrontare la propria valutazione soggettiva con una misura oggettiva del tempo.

Anche relativamente al tempo, misurare consiste nel segmentare ciò che viene percepito come un fluire continuo e adimensionale per mezzo di eventi dapprima significativi, anche se irregolari (come, ad esempio, le azioni che il bambino fa nel corso di una giornata) e poi con eventi sempre più regolari anche se meno significativi per il bambino stesso. In questo modo, si supera la soggettività della misura per giungere anche in questo caso a misure sempre più confrontabili e comunicabili.

I fenomeni che si prestano a fornire un campione per misurare il tempo sono quelli periodici, che si riproducono via via a intervalli uguali con le stesse caratteristiche: l'alternanza del giorno e della notte, l'alternarsi delle stagioni, delle fasi lunari, delle costellazioni, le pulsazioni del cuore, le oscillazioni di un pendolo, quelle di una molla, ecc.

Anche gli strumenti con cui si possono effettuare le misure del tempo si basano sempre su fenomeni periodici o fenomeni che avvengono con regolarità. Si possono sfruttare, ad esempio, il regolare scorrere della sabbia attraverso la fessura di una clessidra, il metronomo, il modo regolare con cui una goccia cade da un rubinetto, il consumarsi progressivo della cera di una candela. Utili,

a tale scopo, sono pure gli orologi analogici e digitali che ormai tutti i bambini posseggono. La presenza in classe di orologi di più tipi non solo favorirà una maggiore consapevolezza nell'uso dei vari strumenti, ma offrirà anche spunti per discutere su come si leggono e per avviare i bambini a un uso corretto dei multipli e sottomultipli di unità di misura temporali.

Sempre in relazione ad attività di vario tipo che si svolgeranno nel corso di tutto il ciclo della scuola elementare, i bambini faranno esperienze dei diversi tipi di calendari, cioè dei modi in cui gli intervalli di tempo possono essere rappresentati. Si lascerà naturalmente spazio alle rappresentazioni soggettive per condurre progressivamente i bambini all'interpretazione e all'uso sia di rappresentazioni lineari, legate alla percezione dello scorrere continuo del tempo, sia di rappresentazioni circolari, legate alla percezione del ripetersi ciclico degli eventi.

Un'esperienza utile che si suggerisce consiste nel guidare i bambini nella «ricostruzione» della propria storia andando indietro nel tempo fino al margine del loro ricordo. Verranno così registrate le esperienze più significative della loro vita (il primo giorno di scuola, la nascita di un fratellino, un viaggio, la scoperta di una nuova cosa); nascerà, cioè, la necessità di collocarle correttamente nel tempo. Tutto questo lavoro, che si può iniziare in prima elementare, sarà riportato in un quaderno, corredato da disegni e da fotografie, che potrà essere utilizzato per tutto il ciclo elementare. I bambini verificheranno così non solo i propri progressi ma si approprieranno più facilmente delle due «dimensioni del tempo» (ciclica e lineare).

I bambini scopriranno che molti eventi si ripetono ciclicamente (l'apertura e la chiusura della scuola, il Natale, il compleanno, la stagione calda e quella fredda), mentre altri eventi non si ripetono più, che molte cose si trasformano (loro stessi, ad esempio) e questa trasformazione è legata allo scorrere del tempo. Progressivamente i bambini, riflettendo sul lavoro fatto, arriveranno alla rappresentazione della propria vita attraverso un grafico rettilineo, costruiranno cioè una striscia su cui «collocheranno» in modo appropriato gli eventi significativi dopo aver stabilito quale segmento rappresenta un certo intervallo. Si potranno usare rappresentazioni di questo tipo anche per costruire la «striscia della storia». Ogni avvenimento storico studiato potrà essere sintetizzato in un disegno che verrà collocato sulla lunga striscia che progressivamente «invaderà» tutto il perimetro delle pareti dell'aula.

Si possono costruire anche calendari che danno risalto alla dimensione ciclica del susseguirsi degli eventi temporali (ad esempio, lune piene, compleanni, Natale) o realizzare disegni aventi per tema le caratteristiche dei vari mesi dell'anno: così dicembre potrà essere rappresentato da Babbo Natale, giugno dal grano e dai papaveri, agosto dal mare, settembre dall'apertura della scuola, ecc. A mano a mano che i disegni vengono realizzati si possono incollare su un grosso disco di cartone che verrà appeso alla parete dell'aula, in modo che apparirà chiara la rappresentazione circolare del tempo associata al ripetersi delle stagioni, come pure di tutti quegli eventi che periodicamente si ripetono.

Di particolare interesse risulta la costruzione dei contatori del tempo (cfr. fig. 4). Il contatore dei secondi è il più veloce: quando

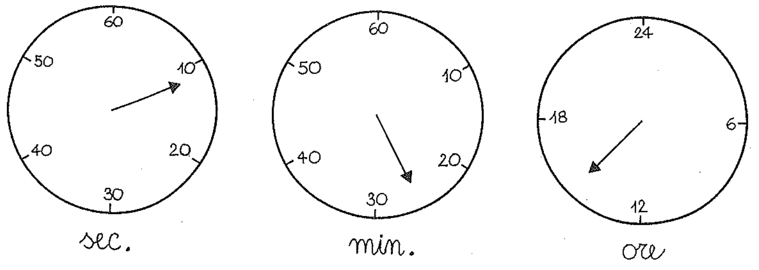


Figura 4

questo fa un giro completo il contatore dei minuti si muove di 1/60, quando il contatore dei minuti fa un giro completo quello delle ore si muove di 1/24. Viceversa, occorre che il contatore dei secondi abbia fatto 60 giri perché il contatore dei minuti faccia 1 giro, e quello dei minuti faccia 60 giri perché quello delle ore ne faccia 1, che quello delle ore faccia 24 giri perché si compia un intero giorno.

7. Cenni storici sulle unità di misura

Così Palma e Pezzella (1987, pp. 136-137) ricostruiscono la storia delle unità di misura:

Sappiamo che nei secoli passati popoli di regioni diverse usavano unità di misura diverse per grandezze dello stesso tipo e che ancora oggi c'è differenza tra le unità di misura utilizzate nei paesi latini e quelle

utilizzate nei paesi anglosassoni: nei primi abbiamo, per le lunghezze, il metro e i suoi multipli (decametro, ettometro, chilometro, ...) o sottomultipli (decimetro, centimetro, millimetro, ...), nei secondi lo yard e i suoi multipli (il miglio, ...) o sottomultipli (il pollice, il piede, ...).

Eppure l'esigenza di unificare le unità di misura è stata sempre sentita: è del 1508 un capitolo siciliano in cui si ordinava di osservare rigorosamente l'editto di Alfonso il Magnanimo, vissuto dal 1416 al 1458, che stabiliva le unità di misura uguali per tutte le città, sotto minaccia di pene severe. Le cose però non cambiarono e quando, tre secoli più tardi, uscì in Sicilia una nuova legge che unificava tutte le misure (1809) vi erano, per esempio, ben quattrocentodieci diversi sistemi di misura dei liquidi.

In tutte le varie comunità il modo di misurare dipendeva da tradizioni contadine, dai recipienti generalmente usati in una certa regione per contenere liquidi o cereali, da problemi di scambi commerciali. La necessità di uniformare le varie unità di misura è cresciuta a mano a mano che sono aumentati gli scambi commerciali e le varie comunità sono venute in contatto tra loro, via via che si è sviluppato il concetto di imposta e, con esso, la necessità di conoscere quanta terra possedeva il singolo proprietario o quanta merce era in grado di produrre e di vendere.

Il sistema metrico decimale, da noi attualmente usato e per noi così familiare da sembrarci il naturale sistema di misura, si è in realtà affermato solo in quest'ultimo secolo, e in taluni paesi quali la Gran Bretagna è stato adottato solo da pochi anni. Fu stabilito in Francia durante la rivoluzione e fu adottato in Piemonte nel 1845. Successivamente, mentre procedeva l'unificazione, la sua adozione fu estesa a tutto il territorio italiano, sostituendo così le unità di misura in uso nelle varie regioni. Non fu accettato facilmente perché considerato troppo astratto e difficile: prima della sua introduzione, per esempio, non era concepibile usare per una superficie un'unità di misura attinente alla lunghezza (il metro quadrato). Era infatti abitudine di quasi tutte le regioni misurare le superfici con unità di peso: ciò che interessava più dell'estensione di un terreno era la sua produttività, la rendita, la quantità di grano che poteva essere prodotta in quel dato appezzamento.

Si cercò allora di favorire la sua diffusione collegando le varie unità di misura a parti del corpo umano, il centimetro all'unghia, il decimetro alla larghezza della mano a dita unite, il metro a dieci mani e così via, realizzando una capacità di misurare a gesti ancora presente in molti vecchi delle nostre campagne.

Oltre alle diverse abitudini delle varie regioni, un'ulteriore causa del grande numero di unità di misura utilizzate fino al secolo scorso era l'usura dei campioni. In Liguria, per esempio, un'unità di misura di capacità era il *barile*, costruito in marmo e soggetto a notevoli variazioni in seguito allo sfregamento dovuto alle continue pulizie che venivano fatte dopo aver depositato in esso, per controllo di misura, il vino. Un suo sottomultiplo era la *pinta*, costruita in ferro e quindi soggetta a minore variazione per l'usura. Questa diversa possibilità di deterioramento dei due recipienti comportò un grave problema: mentre all'inizio del XV secolo la pinta-campione era la cinquantaseiesima parte del barile-campione, due secoli più tardi era la sua ottantesima parte. Il barile-campione si era consumato molto di più nel corso degli anni.

Il campione di unità di misura deve essere il più possibile non soggetto a variazioni o deformazioni e inoltre deve essere data una sua definizione rispetto a qualche grandezza che si suppone non vari nel tempo.

Il *metro* è l'unità di misura di lunghezza adottata con l'introduzione del sistema metrico decimale.

La particolare attenzione che verso la fine del XVIII secolo era rivolta alle misurazioni terrestri consigliò di scegliere come unità di misura un sottomultiplo del meridiano terrestre. Fu scelto il meridiano passante per Dunkerque (Francia) e Montjuich (Spagna) e si stabilì di prendere come unità di misura la sua 40-milionesima parte a cui si diede appunto il nome di metro. In realtà sorsero subito dei grossi problemi: la lunghezza di un meridiano terrestre non è fissa come a noi sembra perché la terra subisce continue variazioni, anche se per noi impercettibili, né è possibile certamente rapportare ogni lunghezza a una unità di misura così inaccessibile.

Nonostante questi problemi nel 1799 si arrivò alla costruzione di un metro legale in platino: un campione metallico dell'unità di misura scelta. Nel 1875 questo campione fu sostituito con un altro costruito con una lega di due metalli, il platino e l'iridio, e avente la caratteristica di variare di molto poco al variare della temperatura. La sua forma è particolare ed è dovuta alla necessità di evitare ogni deformazione. Su di esso sono incisi due gruppi di tre righe vicinissime e la distanza tra le due righe centrali è appunto il metro legale. Anche se successive misure del meridiano inizialmente considerato furono leggermente diverse da quelle eseguite in un primo momento per stabilire la lunghezza del metro, si è preferito non modificare più questa unità di misura e il suo campione è attualmente conservato a Sèvres, vicino Parigi, presso l'Archivio Internazionale dei Pesi e Misure, al riparo dalla luce, aria e da qualsiasi elemento possa alterarne la lunghezza. Si trova in un luogo sotterraneo accanto a un altro campione fondamentale, il chilogrammo, anch'esso in platino e iridio, unità di misura della massa dei corpi ed equivalente alla massa di un decimetro cubo di acqua distillata, alla temperatura di 4 gradi centigradi, al livello del mare e a 45 gradi di latitudine.

In anni recenti è però sorta l'esigenza di avere a disposizione il metro campione riferito a una lunghezza rigorosamente costante e indipendente da qualsiasi fattore esterno, senza ricorrere a un campione come quello di Sèvres, pur sempre distruttibile e soggetto a deterioramento. Nel 1960 si è adottato infatti un metro campione definito in base alla lunghezza d'onda di una particolare e ben definita radiazione luminosa. Si è scelto un gas, il cripto, e le onde da esso emesse a particolari condizioni. Il metro è un particolare multiplo della lunghezza d'onda del cripto: in tal modo è sempre possibile, con attrezzature particolari, misurare tale lunghezza e disporre così di un metro campione immutabile.

V
ORGANIZZAZIONE DELLO SPAZIO E SISTEMI DI RIFERIMENTO

1. Introduzione

Lo spazio reale è vissuto dal soggetto umano in senso statico e in senso dinamico. Lo spazio, infatti, si struttura attraverso azioni tese a:

— localizzare oggetti (stabilire le posizioni reciproche delle parti di un oggetto e le posizioni di oggetti gli uni rispetto agli altri);
— descrivere spostamenti (fissare le posizioni successive nel tempo di un oggetto mobile in relazione alla posizione di oggetti immobili, di sfondo).

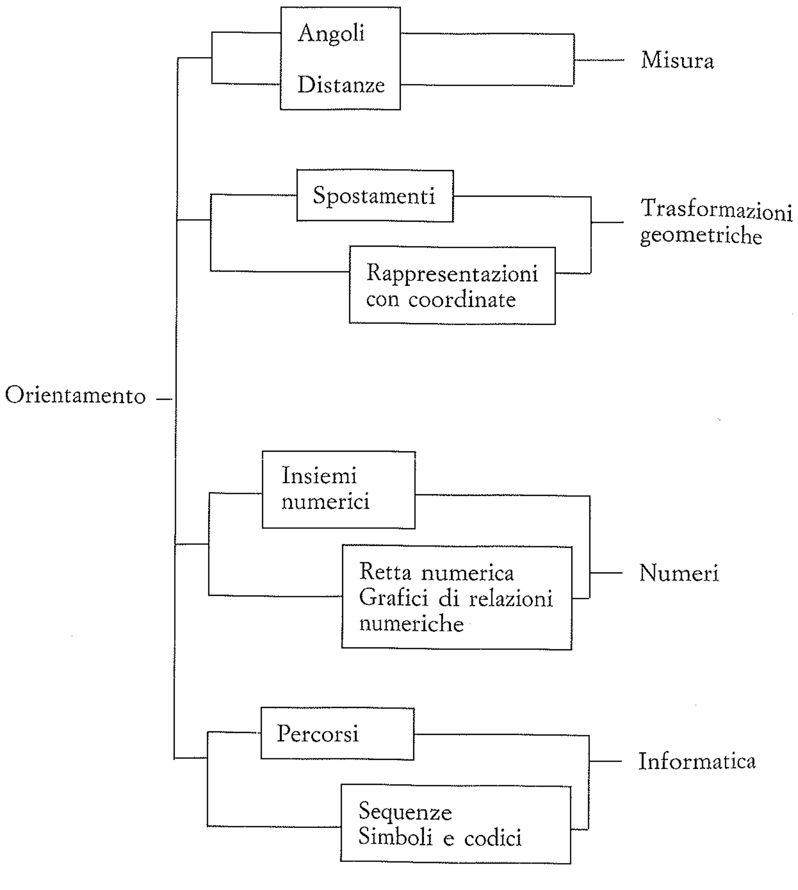
Nei Nuovi Programmi troviamo:

a) *obiettivi del primo ciclo*:
— localizzare oggetti nello spazio, prendendo come riferimento sia se stessi, sia altre persone e oggetti;
— effettuare spostamenti lungo percorsi assegnati verbalmente e descrivere percorsi, anche con opportune rappresentazioni grafiche;

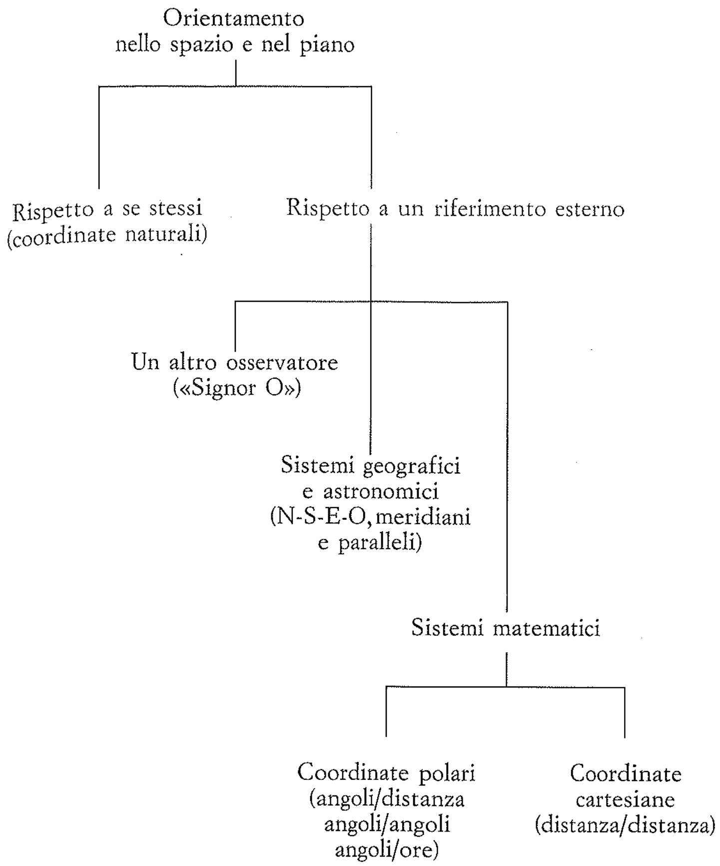
b) *obiettivi del secondo ciclo*:
— individuare, in situazioni concrete, posizioni e spostamenti nel piano; rappresentare tali situazioni anche con l'uso di reticolati, mappe, cartine;
— acquisire gradualmente capacità di orientamento, di localizzazione di oggetti e, in generale, di progressiva organizzazione dello spazio; sistematizzare le esperienze spaziali, con progressiva introduzione di rappresentazioni schematiche della realtà fisica;

c) *indicazioni metodologiche generali*:

- indagare sulle capacità iniziali di orientamento (raccordo con la pre-scuola);
- partire dalla pluralità di sollecitazioni che provengono dalla percezione della realtà fisica e costituire una comune base di esperienze su cui fondare la riflessione e la concettualizzazione matematica (raccordo con la scuola media);
- procedere, in modo significativo e costruttivo, dall'esperienza alla rappresentazione con la conquista dei primi livelli di formalizzazione (cfr. schemi 1 e 2).



Schema 1



Schema 2

2. Orientamento rispetto a se stessi e rispetto a un altro osservatore

Poiché l'uomo guarda il mondo con i suoi occhi, dalla sua posizione, la forma più elementare di organizzazione dello spazio fisico consiste nell'assumere il proprio corpo come centro di riferimento e nel coordinare rispetto a se stessi gli oggetti secondo i tre tipi di rapporti: davanti/dietro, a destra/a sinistra, sopra/sotto.

Il corpo nella sua postura eretta individua un piano di riferimento che divide lo spazio in due semispazi, il «davanti», su cui si affaccia lo sguardo, e il «dietro».

La simmetria bilaterale del corpo individua un piano, perpendicolare al primo, che divide anch'esso lo spazio in due semispazi: «del braccio destro» e «del braccio sinistro».

L'appoggio al suolo porta a considerare, all'altezza degli occhi, il piano orizzontale che fa distinguere il «sopra» e il «sotto». Gli occhi sono, dunque, il centro di un sistema di tre piani, tra loro perpendicolari, che dividono lo spazio circostante la persona in otto zone contigue. D'altra parte, restano individuate le tre direzioni privilegiate, che sono rese dall'apertura delle braccia nelle tre diverse posizioni.

Negli anni della scuola elementare il bambino progressivamente aquisisce lo schema corporeo e la conoscenza dei termini avanti/dietro, a destra/a sinistra, sopra/sotto. È dunque necessario verificare il grado di sicurezza con cui fa uso di questi termini per l'orientamento nello spazio in situazioni diverse, ancor prima di introdurlo all'organizzazione del piano del foglio per la scrittura e la lettura. Suggeriamo alcune attività utili per un tale accertamento:

— al bambino, in piedi, si chiede di elencare oggetti che vede davanti a sé, oggetti che sono alla sua destra (o alla sua sinistra); poi lo si farà ruotare di un quarto di giro e gli si ripeterà la stessa domanda;
— esercizi ginnici (saltelli in avanti, di lato, a destra, ecc.; slancio della gamba destra in avanti, in dietro, lancio della palla, ecc.);
— far eseguire percorsi con istruzioni del tipo: «vai otto passi avanti», «gira un quarto di giro a destra», «fai dietro front», ecc.;
— far rappresentare i percorsi sul foglio quadrettato in relazione all'orientamento del foglio rispetto a chi guarda;
— primi esercizi per individuare una casella: dividere un foglio in quattro riquadri, collocare e in seguito disegnare un qualsiasi oggetto in un riquadro assegnato con indicazioni del tipo «in alto a destra», ecc.; viceversa, dire in quale riquadro un dato oggetto si trova; passando ad un foglio diviso in nove caselle i termini saranno «in alto a destra», «in alto al centro», «in alto a sinistra», «al centro a destra» e così via.

Occorre consolidare la padronanza lessicale delle coordinate naturali e far prendere coscienza dell'importanza del centro di riferimento, sviluppandone il carattere di relatività. Il bambino sarà via via in grado di decentrare il proprio punto di vista e di descrivere ciò che vede un altro osservatore stando in una posizione qualsiasi rispetto a lui. Affinché il bambino acquisisca queste capacità, possono risultare utili le seguenti attività:

— gioco dello «specchio» con un compagno (coscienza che se io alzo la mano destra, la mia immagine speculare alza la sinistra e così via);
— due «osservatori», seduti l'uno di fronte all'altro, sono invitati a indicare verbalmente la collocazione di oggetti, ciascuno dal suo punto di vista. Dopo aver spostato le sedie (ad esempio, di un quarto di giro l'una rispetto all'altra), si ripete l'invito e così via;
— il «Signor O» (cfr. p. 79);
— due «osservatori» nominano gli oggetti che ciascuno vede *allineati* con un oggetto prescelto per verificare che cambiando il punto di osservazione cambiano la direzione dello sguardo e l'allineamento.

3. Orientamento rispetto a oggetti

Spesso nella vita quotidiana usiamo espressioni del tipo «prendi il libro che è sul tavolo», «sposta la sedia che è vicino alla porta», ecc. Situazioni analoghe che si verifichino in classe faranno riflettere i bambini sulle informazioni che permettono di riconoscere la posizione indicata (c'è sempre un margine di indeterminatezza cui sopperisce il «buon senso» di chi esegue l'ordine!).

Si possono organizzare giochi molto semplici che consistono, ad esempio, nel ricostruire situazioni con tappi, cubetti, ecc., e nel chiedere di individuare un oggetto dalla descrizione della sua collocazione rispetto ad altri oggetti. Anche i primi disegni in pianta richiedono al bambino di coordinare le posizioni reciproche degli oggetti rappresentati. A queste attività didattiche (ad esempio, la rappresentazione di un piano della scuola o di un appartamento) sono da collegare l'introduzione del mappamondo, delle cartine topografiche e delle carte geografiche. Esperienze in cui lo sguardo esplora un terreno aperto o il cielo portano a fissare le posizioni reciproche di oggetti, attraverso *distanze angolari* (cfr. pp. 80-83).

Tali situazioni permettono tra l'altro di consolidare:

— il concetto di *retta* (il «cammino» dello sguardo che punta l'oggetto, che può essere «materializzato» da un braccio teso, da un'asta appoggiata all'occhio o da un filo ben teso);
— il concetto di *direzione* come proprietà comune di rette parallele (se due bambini si danno una mano e con l'altra indicano lo stesso oggetto, le loro braccia vengono a formare un triangolo; ma se puntano oggetti sempre più lontani, ad esempio il Sole, le braccia tese risulteranno parallele);
— il concetto di *angolo* come rotazione di una semiretta attorno

all'origine, e della sua indipendenza dalla lunghezza dei lati, che possono essere anche diversi tra loro.

Anche le esperienze di orientamento fuori dell'aula, in spazi grandi, aperti, faranno nascere in maniera significativa l'esigenza di strutturare sistemi e punti di riferimento come, ad esempio:

— la linea dell'orizzonte locale, cui riferire le posizioni di un astro, ad esempio la Luna, nel corso del tempo;
— la stella Polare, unica stella che appare fissa nella percezione della rotazione del cielo notturno (si osserverà che la proiezione sul piano dell'orizzonte della direzione della stella Polare è sostituibile, con piccola approssimazione, con la direzione Nord dell'ago di una bussola);
— i punti cardinali (cfr. pp. 84-85) sul piano dell'orizzonte; il Nord è il punto «all'infinito» che sta sotto la stella Polare. Chi si dirige verso la stella, pur avendo lo sguardo fisso verso il cielo, segue sul terreno un percorso rettilineo; alle sue spalle è il Sud; tracciata sul terreno la retta NS, la direzione che si costruisce perpendicolare a essa indica i punti Est e Ovest. Il Nord, è d'altra parte, la direzione delle ombre a mezzogiorno e il Sud è indicato dalla posizione del Sole a mezzogiorno. L'Est e l'Ovest sono i punti dell'orizzonte in cui sorge e tramonta il Sole nei giorni degli equinozi (21 marzo e 23 settembre).

Particolarmente curato sarà, in generale, il passaggio al disegno, per ottenere rappresentazioni delle situazioni reali, così che il bambino sia consapevole del lavoro di modellizzazione in senso geometrico che va conducendo. Per rimanere nello spazio tridimensionale può essere utile, ove possibile, la costruzione di modelli.

4. Coordinate polari

Molte volte, per fissare una posizione, ci limitiamo a spostare lo sguardo ancorandolo a oggetti facilmente identificabili. Infatti, spesso, rivolgendoci a un amico diciamo: «Vedi laggiù l'entrata della scuola? Girati un po' a sinistra. Gianna è la ragazza con la giacca rossa a 20 metri circa da noi». Organizziamo così lo spazio nella maniera più naturale a partire dalla nostra posizione, in direzione e distanza.

Considerazioni di questo tipo conducono all'introduzione delle «coordinate polari», allorché si fissino con maggior rigore la direzione di partenza, l'angolo da cui ruotare a partire da essa, la distanza dall'osservatore. L'itinerario didattico, da svilupparsi nell'arco dei cinque anni, partirà dalla costruzione del concetto di angolo e dalla consapevolezza del doppio verso di una rotazione (ad esempio, verso di percorrenza, orario e antiorario, sul cerchio, in giochi di girotondo). Occorre poi far maturare l'idea dell'insieme delle direzioni che escono «a raggiera» nello spazio dal centro di riferimento.

Infine, giochi tipo il bersaglio polare, la battaglia polare (cfr. pp. 89-90) servono a mettere in evidenza la necessità di indicare, oltre alla direzione, anche la distanza del punto voluto dal centro di riferimento.

Ricorrendo alla misurazione di angoli e distanze, si facciano usare le coordinate polari in esperienze di orientamento su terreni aperti (cfr. fig. 1):

— tenendo un semigoniometro, o disco di cartone opportunamente tagliato e graduato, in posizione orizzontale all'altezza degli occhi, con lo 0 sulla direzione verso il punto di riferimento di inizio per gli angoli, si traguarda l'oggetto scelto leggendo la misura dell'angolo nel senso orario. Tale angolo (misurato sul piano orizzontale!) si chiama *azimut*. Usando una bussola, l'angolo azimutale è l'angolo che la direzione dal punto considerato forma con la direzione Nord segnata dall'ago;
— si misura con un metro la distanza tra il punto di osservazione e l'oggetto.

Le coordinate polari di un oggetto sono, dunque, *distanza* e *azimut*.

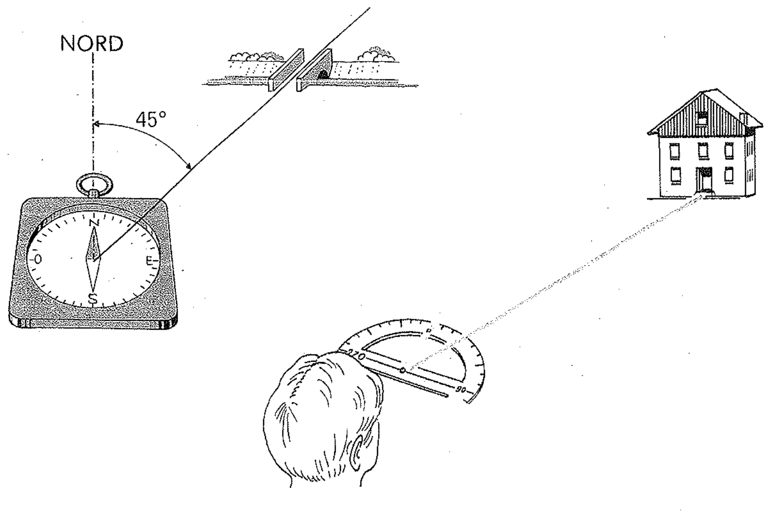


Figura 1

È chiaro che nella vita quotidiana non capita a nessuno di noi di dover determinare attraverso misurazioni dirette le coordinate polari di un punto su un piano. Si tenga presente che in altre situazioni le 2 coordinate sono espresse in angoli, oppure in ore e angoli: ad esempio, le coordinate geografiche, latitudine e longitudine (sul mappamondo); le coordinate astronomiche locali, azimut e altezza (sul piano dell'orizzonte e sul piano, perpendicolare ad esso, passante per l'astro e lo zenit dell'osservatore), sono espresse con 2 angoli come anche le coordinate astronomiche assolute (cfr. pp. 91-93), declinazione e ascensione retta (sulle carte del cielo).

5. Introduzione al sistema di riferimento cartesiano

Nei Nuovi Programmi della scuola elementare non è nominato il piano cartesiano, ma le «quadrettature e reticoli a coordinate intere». Questo è un invito a lavorare sul «discreto» e non sul «continuo». Le attività didattiche devono essere ben graduate, per dare rilievo a ciascuno dei concetti coinvolti (direzione e verso sulla retta, punto di partenza, percorso a «passi» uguali, coppia di coordinate). Solo in un secondo tempo essi potranno essere colti e padroneggiati tutti insieme (cfr. pp. 85-86).

Del resto, anche a livello di scuola media, spesso l'uso del piano cartesiano è introdotto troppo presto e rischia di ridursi all'acquisizione di una tecnica, eseguita meccanicamente, per la rappresentazione grafica di relazioni numeriche. Sono frequenti gli errori riguardo all'uso delle parole «direzione» e «verso», la graduazione degli assi a intervalli di lunghezza uguali, l'ordine delle due coordinate, l'inizio delle graduazioni degli assi.

6. La relatività delle posizioni

Riguardo ai sistemi di riferimento, citiamo Karplus (1970):

La conversazione immaginaria che segue mostra le difficoltà che possono sorgere quando le persone cercano di comunicare la posizione di un oggetto. Le difficoltà si risolvono solo dopo che si è trovato un accordo su un adeguato sistema di riferimento.

Percy, Clyde e il loro cane fanno una lunga passeggiata attraverso la contea di Mc Dougall.

Percy: «Clyde, vedi il falcone appollaiato su quell'albero lassù?».

Clyde: «Che falcone? Su quale albero? Dove?».

Percy: «Su quell'albero grande, spezzato, là» (indica col dito).

Clyde: «Oh, quell'albero di fronte a noi! Lo vedo, ma non vedo il falcone!».

Percy: «È sul ramo».

Clyde: «Ci sono troppi rami, mi arrendo. Lasciamo andare».

Percy: «No, ricominciamo da capo. Vedi quel ramo spezzato nella metà superiore del tronco dalla parte destra?».

Clyde: «Sì, lo vedo».

Percy: «Bene. Ora guarda il secondo ramo al di sopra di quello, dalla stessa parte dell'albero. Guarda a destra. Ora *devi* vedere il falcone».

Clyde: «Oh, certo, quello è un falco!».

Cosa è accaduto in questa conversazione? Che cosa ha permesso infine a Percy di comunicare la posizione del falco senza confusione, ambiguità o assurdità? In primo luogo, ha stabilito un sistema di riferimento scegliendo un grosso ramo facilmente identificabile sull'albero e indicando la posizione dell'albero rispetto a se stesso. Clyde ha potuto afferrare il sistema di riferimento, poi Percy ha specificato la direzione («sopra quello») e la distanza («il secondo ramo») del ramo dal falco.

Notate che il sistema di riferimento consisteva in un *punto* di riferimento (il ramo spezzato) e in due *direzioni* di riferimento (da Percy all'albero e in alto). Queste due componenti sono parti necessarie di un sistema di riferimento e, come abbiamo detto prima, esse devono essere identificabili. Il tentativo iniziale di Percy di usare l'albero come punto di riferimento è fallito perché c'erano diversi alberi. Il tentativo seguente di identificare l'albero usando il proprio corpo come punto di riferimento e il suo braccio alzato come direzione di riferimento è riuscito, ma la posizione del falco non era ancora specificata in modo abbastanza accurato per permettere a Clyde di trovarlo.

L'uso dei sistemi di riferimento nella vita di ogni giorno assume innumerevoli aspetti e viene adattato a molte circostanze specifiche che possono presentarsi. Il punto di riferimento nel nostro dialogo, per esempio, era un ramo rotto, ma qualsiasi «segno» o altro punto speciale nell'ambiente circostante avrebbe funzionato altrettanto bene. Gli angoli di una stanza, i crocevia, un alto edificio, un monticello o un tronco potrebbero venire usati come punti di riferimento. Questi sono chiamati *punti di riferimento ambientali* per distinguerli dall'uso che una persona fa del proprio corpo come *punto di riferimento personale* (ad esempio, «la freccia colpì a due piedi al di sopra della mia testa»).

La direzione di riferimento nel nostro dialogo, determinata dalla direzione in cui Percy guardava, è chiamata *direzione di riferimento personale*. Altri esempi di direzione personale sono: destra, sinistra e dietro.

Ci sono anche *direzioni di riferimento ambientali*, come Nord (secondo la direzione della bussola magnetica), verticalmente su e giù (secondo la direzione del filo a piombo), la direzione di una strada di città, di una strada maestra, la direzione di un fiume, il margine di un campo o di una foresta e così via.

VI

LE FIGURE NEL PIANO E NELLO SPAZIO

1. Introduzione

È bene che l'alunno sia avviato sin dalla prima elementare all'osservazione delle figure, cosa che, d'altra parte, egli fa già naturalmente. Egli esamina l'ambiente, riconosce forme uguali e assegna a esse un nome, che è sovente quello dell'oggetto a lui più familiare. Inoltre il disegno, che è la prima modellizzazione della realtà, rivela che il bambino già conosce e distingue forme diverse. La prima differenziazione che il bambino opera è quella tra figure «appuntite» e «tonde», discriminazione che nasce dalla manipolazione degli oggetti. Infatti, la mente visualizza solo se le mani hanno svolto numerose esplorazioni tattili su forme aventi quelle caratteristiche, così dapprima viene percepita la differenza tra angolo e curva e successivamente vengono colte le altre proprietà geometriche delle forme.

È opportuno, quindi, non dimenticare questo ricco bagaglio di esperienze e perciò non introdurre discorsi sulle figure solo nel secondo ciclo, partendo da definizioni astruse e formule insignificanti per l'allievo. Per raccordarsi a queste conoscenze prescolastiche è opportuno che l'insegnante proponga giochi con le figure e osservazioni sull'ambiente e sue modellizzazioni.

Solo attraverso numerose attività il bambino sarà portato a sistematizzare le proprie conoscenze e a migliorare il proprio vocabolario. Non bisogna mai dimenticare che si apprendono nuovi termini esclusivamente in situazioni stimolanti, ma d'altra parte, ogni qualvolta se ne presenti l'occasione, è bene che il bambino impari vocaboli e definizioni corrette, in quanto è più facile acquisire nozioni nuove che sostituire quelle inesatte. Termini errati nascono spesso da un'impostazione «statica» dello studio delle figure, infatti sono noti a tutti gli insegnanti i tipici errori di chiamare il quadrato rombo, se non ha i lati paralleli ai margini del foglio, o il triangolo rettangolo isoscele solo rettangolo, se ha per base un cateto, e solo isoscele, se ha per base l'ipotenusa (cfr. fig. 1).

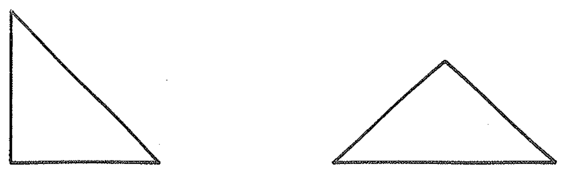


Figura 1

I suddetti errori nascono dal fatto di lavorare su un foglio quadrettato, che per comodità ci induce a disegnare le figure sempre nella stessa posizione, anche perché con il bambino, che impara a scrivere, s'insiste molto sull'orientamento del foglio. Poiché per la scrittura è indispensabile una posizione fissa del foglio (le lettere possono subire solo traslazioni, ma non rotazioni e ribaltamenti) è opportuno affiancare subito, al primo apprendimento della scrittura, attività di disegno su fogli bianchi, grandi e, comunque, orientati, e ben presto anche su fogli diversamente strutturati come quelli per le tassellazioni. Inoltre, giocare con le forme e creare con esse disegni sviluppa la fantasia e aiuta alcuni allievi a sbloccarsi.

Nei Nuovi Programmi si fa riferimento a uno studio della geometria che parta dalle esperienze precedenti del bambino per poi arricchirle e sistematizzarle; quindi, tra gli obiettivi del primo ciclo vi è quello di «riconoscere» negli oggetti dell'ambiente e denominare correttamente i più semplici tipi di figure geometriche, piane e solide. Inoltre, lo studio delle figure non deve limitarsi alla semplice memorizzazione della nomenclatura tradizionale e delle formule di calcolo, perché solo con una geometria dinamica l'alunno potrà acquisire in modo significativo i concetti di perimetro, area e volume. Nozioni che successivamente sarà in grado di trasferire a figure irregolari, così come è scritto negli obiettivi del secondo ciclo. Infine è utile passare sempre dalla fase manipolativa a quella grafica, poiché, come è rilevato nelle indicazioni didattiche dei Nuovi Programmi, il disegno geometrico prima a mano libera e poi con gli strumenti promuove abilità operative e favorisce l'assimilazione dei concetti.

2. Le forme e l'ambiente

Riconoscere alcune forme nell'ambiente non è un attività, come può sembrare, facile, in quanto esse sono incorporate in ciò che ci circonda e raramente vengono viste isolate. L'abilità di discriminare in una costruzione o in un oggetto una determinata figura dipenderà dall'estensione delle precedenti esperienze del bambino. Dopo l'esame dell'oggetto si può passare a una sua costruzione con listelli di legno o, meglio, con materiale strutturato come il gioco del meccano. E, infine, si possono costruire o ritagliare forme congruenti a quelle corrispondenti nella fotografia o nell'oggetto esaminato. Quanto l'ambiente circostante influenzi l'analisi delle forme lo si può sottolineare con alcune note illusioni ottiche.

Altra analisi interessante da intraprendere con gli allievi è quella sulle forme degli oggetti e delle costruzioni in relazione alla loro funzione, al tipo di materiale con cui sono costruiti e in particolare alla loro resistenza. Ma solo se si chiede agli alunni di creare forme, di assemblarle per ottenere una determinata costruzione, di adattare certi oggetti all'interno degli edifici realizzati, di costruire con materiali apparentemente fragili forme in grado di sostenere carichi pesanti, essi capiranno come ogni forma abbia una funzione specifica.

Le prime costruzioni umane erano circolari perché il *cerchio* è la forma più semplice da disegnare — bastano, infatti, un palo e una corda — ed è una forma molto utile per il trasporto in quanto rotola. Le costruzioni attuali sono *rettangolari* in quanto con tale forma è più facile riempire il piano ed inoltre in stanze rettangolari si sistemano meglio i mobili. Il *triangolo*, invece, è la forma più resistente, infatti triangolari sono le capriate che sorreggono i soffitti, i tralicci dei pali elettrici, i piloni che sostengono i ponti, ecc. Mentre, per quanto riguarda i solidi, il *cilindro* e la *piramide* sono le forme più resistenti, inoltre il cilindro è in grado di rotolare, così come la *sfera*. Il *cubo* e il *parallelepipedo* sono i solidi che meglio riempiono lo spazio, anche se i contenitori sono generalmente a forma di parallelepipedo forse perché presentano maggiore superficie disponibile per la pubblicità.

3. Giochi con le forme

Tra i primi giochi che il bambino fa con le forme vi sono quelli a incastro (in commercio ne esistono di molti tipi, sia bidimensionali che tridimensionali). Non è un gioco semplice, soprattutto se i pezzi differiscono tra loro solo per piccoli particolari. Questi giochi, poiché implicano l'orientamento delle figure in tutti i modi possibili, aiuteranno in seguito l'allievo a distinguere le figure non per la loro posizione, ma esclusivamente per le loro proprietà. Sono giochi in cui il bambino deve riconoscere il pieno e il vuoto, il dritto e il rovescio e in cui deve scoprire che i modi di inserire una forma nella sua cavità sono tanti quanti i suoi assi di simmetria.

I giochi di incastro possono essere costruiti tagliando un foglio o un cartoncino in più parti che l'alunno deve ricomporre (è bene colorare diversamente le due facce, in modo che si distinguano i movimenti di rotazione e traslazione dai ribaltamenti). Sono giochi validi per l'organizzazione dello spazio: costituiscono per l'allievo esperienze sulla conservazione di quantità continua, sulle trasformazioni reversibili (rotazioni e traslazioni, riempire, vuotare, ecc.), sulle proprietà delle congruenze e sulle equiscomposizioni. Interessante, e forse strano, può risultare ai bambini ricomporre figure poligonali tagliate in pezzi con i bordi curvilinei.

Sono particolarmente istruttivi per l'organizzazione dello spazio i puzzle, i mosaici (da segnalare, tra gli altri, i quaderni mosaico della casa editrice Giunti), il tangram. Con questo gioco cinese, costituito da un quadrato diviso in sette pezzi, si ottengono numerose figure, tra cui anche lettere e cifre. Costruire figure dando il modello aiuta gli alunni a cogliere le proprietà invarianti di un poligono, al di là della sua posizione e delle sue dimensioni, e le relazioni spaziali tra i pezzi dati.

Far costruire agli allievi figure e poi farle disegnare su un foglio tracciandone il contorno può stimolarne la fantasia e la creatività oltre ad abituarli a riconoscere le forme indipendentemente dalla loro posizione. Primi esercizi che abbiano i suddetti obiettivi si possono realizzare o dando agli allievi del materiale strutturato, come il trimath e il quadrimath, o più semplicemente dei pezzi di cartoncino di diverse forme e dimensioni con i quali si possono costruire figure del tutto nuove a cui attribuire un significato. È opportuno tagliare le forme sempre in coppia e poi colorarne le due facce con colori differenti in modo che il bambino distingua le figure direttamente congruenti da quelle inversamente congruenti.

Giochi complementari a quelli precedentemente citati risultano la piegatura e la colorazione di fogli, la colorazione di carte a struttura multipla. Si parte dal foglio intero che viene scomposto nelle diverse forme date o trovate. Le due attività descritte conducono alla percezione e allo studio di una struttura, ma con procedimenti inversi. Nella piegatura è il soggetto che costruisce,

in maniera progressivamente cosciente (trasformando un foglio amorfo in un foglio con regioni e frontiere), la struttura che scompone e analizza durante la fase della colorazione. Nella colorazione di carte strutturate si dispone invece già di alcune strutture che il bambino scopre gradualmente, componendo gli elementi in modo libero e in diverse configurazioni.

Conviene, una volta scoperte le strutture, ritagliare i fogli lungo le piegature per far ricomporre i pezzi in modo differente. Mentre nelle carte strutturate è interessante ritagliare la figura base per scoprire i movimenti isometrici che conducono al riempimento del piano.

Nell'esperienza della piegatura della carta, inoltre, il bambino scopre che più piegature esegue più piccoli sono gli angoli, quindi egli si accosta con tale esperienza al concetto di angolo come parte di piano compreso tra due semirette aventi l'origine in comune. Allora, quando successivamente si affronta il problema della misura di un angolo, verrà spontaneo agli alunni costruirsi un campione di misura di carta e renderlo sempre più piccolo piegandolo più volte a metà.

D'altra parte, si comprende come tutti i giochi descritti siano estremamente adatti a migliorare le abilità manipolative e di precisione, così importanti per l'apprendimento dello scrivere. Infine, tali attività sono proficue dal punto di vista didatticopsicologico poiché, esigendo un risultato minimo ed essendo completamente libere, non risultano nella classe discriminatorie.

4. Classificazioni

Lo studio delle figure consiste essenzialmente in partizioni delle medesime in diverse classi di equivalenza a seconda della proprietà o delle proprietà considerate, perciò in geometria è importante confrontare, classificare, associare.

Materiale efficace a tale scopo sono i blocchi logici di Dienes e i *Brainy Blocks* dell'Università di Tel Aviv. I blocchi logici sono 48, cioè 4 forme di 3 colori di 2 dimensioni di 2 spessori (forme: rettangoli, quadrati, triangoli e cerchi). Invece i *Brainy Blocks* sono 32, e precisamente 4 forme di 4 colori di 2 dimensioni (forme: rombi, triangoli).

Da un uso libero dei blocchi si passa spontaneamente a raggrupparli secondo caratteristiche comuni, a confrontarli per coglierne le differenze, a ordinarli rispetto alla diversità di una o più proprietà. I giochi che si possono inventare con tali forme sono numerosi: scoprire il blocco mancante, mettere in una tabella il blocco giusto, disporre i blocchi in modo che orizzontalmente ci sia una sola differenza e verticalmente ce ne siano due, ecc.

È bene, però, non lavorare esclusivamente con materiale strutturato, altrimenti gli allievi saranno portati a identificare certi concetti con quel materiale. Basta preparare figure di cartone prendendo in considerazione altre proprietà e fare giocare i bambini con queste. Oppure far lavorare gli alunni con qualsiasi materiale che offra loro l'occasione di eseguire raggruppamenti e ordinamenti anche non prendendo in considerazione proprietà geometriche (ad esempio, il colore, la ruvidità, il peso, l'età). In esercizi di classificazione e ordinamento l'allievo ha occasione di confrontare lunghezze e superfici, di riconoscere figure congruenti, di verificare l'equivalenza di figure equiscomposte.

Se si è molto lavorato con il materiale, il passaggio a esercizi grafici di associazione, confronto, ordinamento, classificazione con diagrammi di Venn, di Caroll, ad albero o con tabelle non presenta particolari difficoltà. Anzi queste ultime rappresentazioni, una volta ben comprese, verranno naturalmente usate dagli allievi ogni qualvolta saranno indispensabili a chiarire e a sintetizzare una situazione complessa.

Infatti, queste semplici attività, da svolgere nel primo ciclo, si riveleranno particolarmente valide negli anni successivi, perché forniscono agli alunni quegli strumenti indispensabili per sistematizzare le nozioni che apprenderanno successivamente.

5. Forme come modelli della realtà

I primi modelli che il bambino esegue del mondo circostante sono i disegni, che diventano sempre più fedeli alla realtà con il progredire delle sue conoscenze e abilità. Infatti, si passa da una rappresentazione fantastica dell'ambiente (scarabocchi che per il bambino piccolo cambiano continuamente significato) a forme che evocano l'oggetto disegnato. Poi si passa a rappresentare i diversi oggetti in relazione tra loro, ma dapprima convivono differenti punti di vista e le dimensioni sono più legate all'importanza che il bambino dà a un elemento che alla sua realtà. Occorre molto tempo e lavoro affinché i disegni degli alunni prendano in considerazione un unico punto di vista e rappresentino gli elementi con dimensioni proporzionali alla loro distanza dal soggetto. Analogamente, laboriose e graduali sono le attività necessarie a far eseguire piante corrette, in cui tutti gli oggetti siano rappresentati nella stessa

scala e in cui siano rispettate le relazioni spaziali tra i diversi ambienti considerati.

È vantaggioso discutere con i bambini i loro disegni per verificarne le conoscenze geometriche e la padronanza del lessico spaziale. In genere, la comprensione di un concetto non si sviluppa parallelamente alla capacità di spiegare velocemente l'idea afferrata. Allora è importante integrare il linguaggio verbale con quello grafico, poiché il bambino molto spesso è in grado di rappresentare un concetto che, però, non sa illustrare a parole.

Affinché l'allievo migliori le sue capacità di rappresentazione dell'ambiente, risultano utili i giochi:

a) con le ombre. Si possono proiettare con una lampada, su una parete bianca, le ombre di figure realizzate con le mani o con il cartoncino (un gioco può essere quello di indovinare la forma di un oggetto guardandone l'ombra proiettata). Si possono riconoscere oggetti familiari dalla loro ombra e infine si può analizzare come l'ombra di una figura vari in relazione alla sua posizione e alla fonte che l'illumina (lampadina o raggi solari). Sono attività che sviluppano lo spirito di osservazione e portano gli alunni a individuare gli invarianti di una trasformazione;

b) con lastre di vetro. Si mettono davanti a un vetro, che ha sempre la stessa posizione, diversi oggetti e se ne disegna il contorno, così facendo si ottengono disegni nella stessa scala. Se si disegnano oggetti che hanno distanze diverse si constata la relatività delle dimensioni di oggetti vicini e lontani. Se infine gli oggetti sono «obliqui», rispetto alla lastra di vetro, disegnandone il profilo si ottiene un disegno in prospettiva;

c) di stima. Alunni del secondo ciclo possono divertirsi a stimare la grandezza di oggetti lontani e controllarne i valori eseguendo direttamente le misure. Per rendere più produttivo l'esercizio si possono stabilire i limiti in cui l'errore è accettabile (Bernardi *et al.*, 1990b, Parte III);

d) con le proiezioni. Il primo livello è quello di individuare i solidi dal contorno della loro base, disegnata su un foglio orizzontale, chiedendo inizialmente agli allievi di sistemare ogni solido al suo posto. Poi si può passare a discutere con gli alunni fotografie ingannevoli sulle dimensioni degli oggetti (è più difficile valutare le dimensioni di oggetti isolati che di quelli vicini ad altri riconoscibili). Sarebbe anche interessante confrontare diverse fotografie di una stessa scena per comprendere meglio come le forme e le dimensioni percepite siano strettamente legate ai differenti punti di vista;

e) di costruzione. Realizzare modelli di oggetti con cannucce da bibita, aste di legno, cartone o materiale strutturato (Lego, Meccano) aiuta a comprendere i rapporti tra le dimensioni esaminate, a fare stime di misure, a cogliere le relazioni spaziali tra gli elementi considerati. Per meglio capire le connessioni, l'orientazione e la posizione reciproca tra i vari ambienti di un edificio è vantaggioso realizzare una pianta in scala della scuola con polistirolo espanso (il pavimento) e cartone (le mura) e collegare le pareti limitrofe con fermagli.

6. Figure equivalenti nel piano

Imparare a memoria formule su perimetri e aree e far svolgere all'allievo numerosi problemi per la loro applicazione diventa un esercizio meccanico, che non rileva affatto una reale comprensione dei calcoli svolti. Infatti, se l'allievo ha una difficoltà a svolgere questi esercizi, a nulla valgono ripetizioni continue e frustanti dello stesso problema.

Per avere un significativo apprendimento delle formule studiate o, meglio ancora, perché sia l'allievo stesso a scoprire le regole sui perimetri e le aree delle figure classiche, occorre prima di tutto che abbia chiari i concetti di perimetro e di area e delle loro misure. Risulta vantaggioso fare numerose esperienze di figure isoperimetriche e di uguale area. All'inizio il lavoro può procedere lentamente e, per questo, può sembrare inutile, ma poi si vede che all'improvviso la situazione si sblocca. Infatti, una volta che il bambino si è impadronito dei concetti di perimetro e di area, egli è in grado di trovarne la misura in qualsiasi situazione. Quindi, le regole per calcolare perimetri e aree saranno una sua conquista e perciò sarà capace di cavarsela anche di fronte a figure irregolari, così come viene indicato nei Nuovi Programmi.

Si suggeriscono le seguenti attività affinché l'allievo familiarizzi con i concetti di area e di perimetro, con le figure isoperimetriche e isoestese:

a) i giochi con il tangram e con i mosaici, che sono serviti nel primo ciclo a scoprire le forme, possono essere ripresi per riflettere sull'estensione delle figure trovate;

b) data una figura scomporla in parti congruenti oppure date due figure dividerle in poligoni di forma assegnata. Sono sempre attività sull'equiscomposizione, come il tangram, ma questa volta è un lavoro di analisi e non di sintesi di figure equiestese;

c) i polimini. Con tale termine si indica l'unione di uno o più quadratini congruenti e congiunti lungo i lati, peraltro già visti in misura. Il criterio più semplice per scomporre una figura in parti congruenti è quello di usare il quadrettato del foglio. Nel ricercare tutti i polimini con 3,4,5,..., quadrati (trimini, tetramini, pentamini, ecc.) l'allievo fa valutazioni sull'area e sul perimetro delle configurazioni esaminate e inizia a porsi problemi di minimo e di massimo per tali misure. Gli stessi problemi nascono quando invece dei polimini si lavora con figure formate da triangoli, allora in alcuni casi è possibile utilizzare al posto della carta quadrettata quella isometrica formata da triangoli equilateri uguali. L'uso di carte diverse rafforzerà i concetti suddetti, in quanto solo variando ciò che non è essenziale, la forma, il bambino individua ciò che si conserva, l'area o il perimetro;

d) lo studio del ricoprimento del piano con pavimentazioni, carte da parati, mosaici, ecc. porta l'alunno a considerare l'equiestensione per composizione e scomposizione delle figure. Partendo da una pavimentazione semplice, ad esempio quadrata, si possono creare tassellazioni artistiche togliendo da una parte ciò che si aggiunge a un'altra parte. Anche se talvolta si è fatto un uso eccessivo delle pavimentazioni, è sempre opportuno sottolineare gli innumerevoli risvolti didattici che presentano. Lavorando con le tassellazioni il bambino coglie intuitivamente gli invarianti geometrici, fa considerazioni sugli angoli, sui perimetro e sulle aree; una volta scoperto il modulo, può fare valutazioni di carattere metrico (di quante «mattonelle» si sposta nella traslazione) e di carattere combinatorio (quante rotazioni sono possibili);

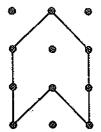
e) nell'eseguire e poi studiare sul foglio percorsi lungo linee chiuse l'allievo fa esperienze sia sul perimetro che sugli angoli. Un bambino effettua il percorso disegnato sul pavimento, un altro dà gli ordini e un terzo registra su un orologio le rotazioni avvenute. In tal modo si scopre che il perimetro di un poligono è la misura della sua frontiera e che per trovarla basta sommare tutti i suoi lati; inoltre ci si accorge che per ritornare al punto di partenza si deve ruotare di un angolo giro. Se aumenta il numero dei lati si vede che diminuisce l'ampiezza degli angoli esterni, ma che la somma degli angoli esterni è sempre di 360 gradi, intuendo così che la circonferenza è il limite dei perimetri considerati, quando il numero dei lati tende all'infinito. Infine, se si esaminano poligoni concavi, si considerano anche angoli negativi: infatti la somma degli angoli esterni è comunque un angolo giro, ma questa volta si deve togliere l'angolo della rotazione eseguita nell'altro verso. Sono esperienze in cui l'alunno consolida il concetto di angolo come rotazione. Conviene ripetere tutte le attività descritte sul piano facendo, questa volta, eseguire i percorsi a un fiammifero e quindi registrare tutte le esperienze e le osservazioni sul quaderno;

f) costruire con lo spago o con le strisce di cartone poligoni deformabili fa riflettere gli allievi su ciò che varia e su ciò che si conserva, con particolare riferimento a problemi di area e di perimetro. Con lo spago si ottengono tutti rettangoli isoperimetrici, tra cui il quadrato ha l'area massima. Con quattro strisce congruenti, invece, si costruiscono tutti i rombi isoperimetrici, tra cui il quadrato ha area massima. Infine, se le strisce sono uguali a due a due e parallele, si hanno tutti parallelogrammi aventi lo stesso perimetro, tra cui quello di area massima è il rettangolo. Inoltre, giocando con i quadrilateri articolabili i bambini fanno considerazioni sugli angoli e sulla rigidità dei poligoni (per rendere indeformabile la figura devono mettere altre strisce in modo che risultino divisi in triangoli);

g) sul geopiano si possono costruire figure irregolari aventi o la stessa area o lo stesso perimetro (se si prende invece dell'elastico una cordicella inestensibile). Si possono calcolare le aree delle figure per scomposizione e forse per semplici figure si può verificare il teorema di Pick per l'area:

$$A = i + \frac{c}{2} - 1$$

dove i = chiodi interni, c = numero dei chiodi del contorno. Ad esempio:



$$A = 1 + \frac{8}{2} - 1 = 4$$

7. Dal piano allo spazio

Nello studio dei possibili ricoprimenti del piano ci si accorge che i pentagoni regolari non vanno bene: infatti, tre di essi non si chiudono nel piano ma solo nello spazio. Allora ecco naturale il passaggio dal piano allo spazio. Dando agli alunni poligoni regolari di cartone duro ed elastici, si chiede loro di costruire tutti i poliedri regolari. Si scoprono così i cinque solidi platonici: con i triangoli equilateri si hanno il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro, con i quadrati l'esaedro (cubo) e con i pentagoni il dodecaedro.

Analogamente a quanto fatto nel piano, si faranno effettuare ai bambini esperienze su solidi equiscomposti. A tale scopo ben

si presta «il cubo Soma», inventato da Piet Hein, costituito da 7 pezzi: 6 pezzi formati dalle possibili combinazioni che si ottengono unendo le facce di 4 cubi uguali e 1 pezzo formato da 3 cubi. Gli allievi si possono divertire a formare diverse figure, ma con il cubo Soma non si possono costruire tutte le configurazioni possibili di 27 cubetti. Di alcuni solidi si è dimostrata l'impossibilità di costruzione, per altre figure il problema è ancora aperto.

È bene presentare alla classe anche situazioni inverse in cui la superficie si conserva e il volume cambia. Ad esempio, si possono prendere due fogli da disegno per costruire due solidi aventi la stessa superficie laterale, come i due cilindri che si ottengono arrotolando il foglio prima lungo una dimensione e poi lungo l'altra.

Il problema del mettere in relazione superficie e volume è simile a quello bidimensionale del rapporto tra perimetro e area, ma di più difficile comprensione se la visione della geometria tridimensionale non è sufficientemente esercitata. Si consiglia, per chiarire la differenza tra volume e area, di giocare con solidi equivalenti e con solidi aventi la stessa superficie, ma di limitare la considerazione ai casi più intuitivi. Essi verranno approfonditi nella scuola media, quando l'alunno avrà più strumenti di calcolo e maggiori capacità di astrazione. Infatti, anche se i solidi rappresentano più fedelmente la realtà circostante, sono più difficili da analizzare poiché nel disegno, che così spesso ci aiuta in tali studi, si perde la terza dimensione che occorre recuperare con l'immaginazione.

Però alunni abituati a lavorare sulle pavimentazioni, spontaneamente, partiranno da esse per risolvere il problema del riempimento dello spazio. È sufficiente immaginare di «far sollevare» i poligoni di qualsiasi pavimentazione per riempire lo spazio con altrettanti prismi aventi per base i poligoni della pavimentazione di partenza. Questa idea può essere avvalorata con la scoperta che la natura si comporta proprio così quando deve riempire lo spazio e quindi si possono mostrare alla classe le fotografie di fenomeni naturali, come la crescita dei cristalli.

Invece il bambino al termine della scuola elementare deve avere ben chiaro il concetto di volume come misura dello spazio occupato dal solido e a tal fine sono utili i classici giochi di travaso di acqua e sabbia. È soprattutto opportuno che l'allievo impari a valutare il volume di un oggetto immerso in un liquido in base al fluido spostato, così facendo si aiuta a svincolare la nozione di volume dal suo calcolo e si mette il bambino in grado di trovare il volume anche di solidi irregolari, come auspicano i Nuovi Programmi. Infine, con esperienze sui solidi immersi il bambino verrà a conoscenza di solidi equivalenti ma non equiscomponibili.

SCHEDE PER ATTIVITÀ DI LABORATORIO

Queste schede sono dirette in parte ai bambini e in parte anche agli adulti. Riteniamo particolarmente significative per gli adulti quelle indicate con *.

Gli insegnanti vengono invitati a svolgere le attività qui proposte perché possano in seguito, con cognizione di causa, suggerirle ai bambini. L'esperienza in prima persona porterà a sottolineare alcuni aspetti, a considerarne altri, a sviluppare l'esperienza, a seconda delle esigenze dei bambini, in direzioni diverse.

Scheda 1

Le prime esperienze nello spazio grafico e nello spazio ambiente

1. *Percorsi*: curve, lettere alfabetiche, grande progressione. Abbiamo già suggerito nel testo attività del genere.

2. *Coloritura di regioni*. Si prendono dei foglietti quadrati di 10 cm di lato e si suddividono con piegature irregolari, ma ben marcate, in tante regioni diverse (proponendo questa attività ai bambini, saranno loro a eseguire le piegature). Si colora ogni regione con colore diverso (è sufficiente anche non colorare nello stesso modo regioni confinanti). Nel colorare, la matita dovrà eseguire tratti paralleli, facendo attenzione a non sconfinare (cioè a non invadere un'altra regione). Si potrà in seguito marcare con tratti di colore scuro tutti i confini delle regioni in cui il foglio è stato suddiviso. Poi, continuando l'esplorazione del foglio, invitiamo a riempirlo con macchie di colore, in modo da distribuirle così che si stabilisca un equilibrio tra spazi vuoti e spazi pieni. Nel secondo ciclo i ragazzi suddivideranno il foglio o con la riga, colorando le regioni così da ottenere forme percettivamente riconoscibili (aggiungendo, eventualmente, le suddivisioni opportune).

3. *Giochi di piegatura della carta** (semplici origami, piegatura e ritaglio) aiutano a costruire figure con assi di simmetria. L'uso della carta carbone e delle macchie di colore a tempera inserite nella faccia interna di un foglio di carta piegato è piuttosto diffuso nella scuola elementare.

4. *Uso dello specchio*. Le prime osservazioni da farsi con lo specchio sono abbastanza note: guardarsi allo specchio, osservare le due metà del proprio viso (uguaglianze e differenze); avvicinarsi allo specchio (l'immagine si avvicina); allontanarsi dallo specchio (l'immagine si allontana); alzare il braccio destro (l'immagine alza il braccio sinistro). L'esperienza, che è di difficile comprensione per un bambino, potrà essere ripresa, con le necessarie variazioni, con l'uso dello specchio magico.

5. *Uso dello specchio magico**. Si prenda una lastra di plexiglass (preferibilmente di colore rosso) da disporsi verticalmente (cfr. fig.1) sul piano del tavolo (per tenerla in equilibrio si possono usare delle mollette per i panni). L'uso di questo strumento consente di vedere un'immagine riflessa, ma anche, trattandosi di una lastra semitrasparente, di poter guidare la punta della matita lungo i contorni di essa (cfr. fig. 2). Guardando sulla faccia sinistra dello specchio magico e disponendo la matita al di là di esso, si possono disegnare i contorni dell'immagine riflessa (ottimo esercizio di coordinazione occhio/mano). Si scopriranno alcune proprietà delle figure simmetriche rispetto a un asse.

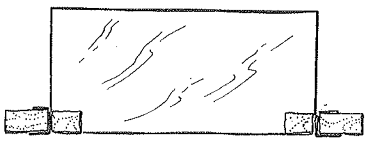


Figura 1

Figura 2

Quanto detto fin qui sui percorsi su un foglio di carta suggerisce nuove attività da farsi, ad esempio, su carta quadrettata.

6. *Percorsi dettati*. Questo tipo di attività è da proporsi a bambini che padroneggiano le coordinate naturali (destra/sinistra, alto/basso). Si può dettare un percorso che da principio l'insegnante avrà cura di eseguire lui stesso alla lavagna. Ad esempio, partenza da un punto in alto a sinistra (cfr. fig. 3), 2 lati di quadretto a destra, 3 lati di quadretto in basso, ecc. (lavorando con i bambini, le direzioni relative alle diagonali dei quadretti verranno introdotte molto più tardi).

Suggeriamo di interrompere il dettato a un certo punto, per lasciare che il bambino giochi liberamente con il breve disegno, inserendolo in una figura più grande, facendovi aggiunte varie, o anche, perché no, ripetendolo. Questo potrà diventare il punto di partenza per altri lavori successivi.

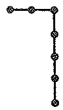


Figura 3

7. Intuitivamente si è cominciato ad avere esperienza delle *isometrie* (traslazione, rotazione, simmetria). È opportuno cercare di costruire dei modellini* per metterne in luce, operativamente, alcune proprietà (lavori di questo genere, però, si potranno proporre ai bambini verso la fine della seconda classe elementare). Ritagliando una figurina e passandola due volte con un ago infilato (cfr. fig. 4) potremo vederla scorrere lungo il filo avanti e indietro (traslazione). Con un automatico, potremo fissare una figura ritagliata su un foglio di cartoncino: essa potrà ruotare intorno all'automatico in senso orario o antiorario.

Prendiamo un foglio di cartoncino ed eseguiamo con le forbici un percorso come quello in figura 5. Ribaltando la parte tagliata, otteniamo una figura (metà in positivo, metà in negativo) con un asse di simmetria.

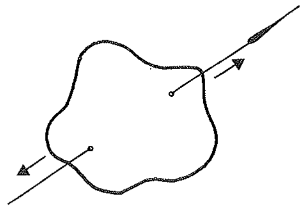


Figura 4

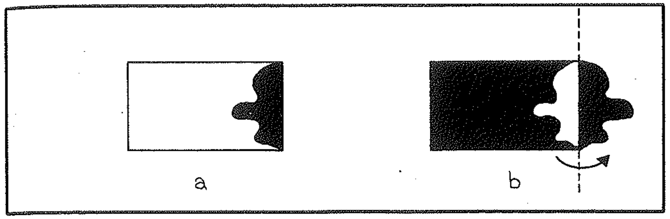


Figura 5

8. *Foglio di carta a strutture multiple da colorare*. È un primo avvio allo studio di una struttura. In questo tipo di lavoro si cominciano a cogliere regolarità, evidenziandole con il colore.

Per quanto riguarda le esperienze nello spazio ambiente individua nei seguenti giochi* gli obiettivi che essi possono contribuire a raggiungere e le eventuali modalità di riflessione (verbale, grafica, simbolica) da proporre nel gruppo di classe.

9. *Palla prigioniera*. I giocatori di una squadra devono colpire i giocatori dell'altra squadra con il pallone, il giocatore colpito diventa prigioniero. Il prigioniero va nel campo opposto dietro tutti gli avversari e si libera se riesce a prendere la palla dai suoi compagni.

10. *Gioco del treno*. I bambini formano una fila poggiando le mani sulle spalle del compagno che li precede. Il capofila con il braccio teso indica le svolte a destra o a sinistra.

11. *Gioco della botta*. Un bambino, il cacciatore, gira intorno ai compagni messi in cerchio e ne colpisce uno; questi allora lascia il suo posto e inizia a correre in senso contrario rispetto al cacciatore. Il primo che arriva al posto vuoto lo occupa e l'altro diventa il cacciatore.

12. *Slalom*. I giocatori delle due squadre si dispongono su due file, secondo il loro numero d'ordine, distanziandosi l'uno dall'altro di un metro. Un bambino, il monitore, è di fronte alle due file e chiama i numeri.

I bambini che hanno il numero chiamato debbono, a slalom tra i compagni, andare all'inizio della fila e poi tornare indietro fino all'ultimo giocatore e infine, sempre a slalom, tornare al loro posto. Il primo che giunge al proprio posto guadagna due punti per la sua squadra.

13. *Pizza ricotta Oreste bum*. Due bambini si tengono le mani, incrociandosi le braccia, e camminano in avanti cantando «pizza ricotta Oreste...», al «bum» invertono il senso di marcia.

14. *Regina reginella*. Ci si dispone uno accanto all'altro e il conduttore del gioco, la regina, è di fronte ai partecipanti. Ognuno di essi, a turno, chiede alla regina quanti passi deve fare per giungere al suo castello. I passi possono essere lunghissimi da elefante, lunghi da leone, piccoli da formica, indietro da gambero.

Scheda 2

Le trasformazioni geometriche

1. Piegare un foglio di carta a forma quadrata lungo le diagonali e lungo le mediane e poi procedere nel seguente modo:
— disegnare un poligono tra 2 piegature qualunque;
— ritagliare il disegno, piegare il foglio e tracciare un nuovo disegno seguendo i contorni del taglio;
— ripetere fino a ottenere 8 disegni complessivamente;
— disporre 2 specchi su 2 piegature; è possibile vedere tutti i disegni?
— c'è un modo per ritagliare 2 disegni alla volta? 4 disegni alla volta? 8 disegni alla volta?

2. Considerare le lettere maiuscole dell'alfabeto e individuare:
— quelle che hanno un asse di simmetria che va da destra a sinistra;
— quelle che hanno un asse di simmetria che va dall'alto in basso;
— quali lettere hanno più di un asse di simmetria (quest'ultimo esercizio si può ripetere con le cifre 1,2,3,...,9).

3. *Modello per traslazione*. Ritagliare una sagoma di cartoncino e in seguito:
— fissarla su un cartoncino bianco con ago e filo, teso e fissato sul cartoncino stesso, per due punti scelti arbitrariamente in modo che possa scorrere;
— far scorrere la sagoma e contemporaneamente «tracciare» il percorso di un suo punto notevole;
— ripetere la fase precedente per punti diversi;
— analizzare i «segni» ottenuti.

4. *Modello per rotazione*. Ritagliare una sagoma di cartoncino e in seguito:
— fissarla su un cartoncino bianco imperniandola con un automatico in un punto scelto arbitrariamente in modo che possa ruotare;
— far ruotare la sagoma e contemporaneamente «tracciare» il percorso di un suo punto notevole;
— ripetere la fase precedente per punti diversi;
— analizzare i «segni» ottenuti.

5. Ritagliare una sagoma triangolare di cartoncino rigido. Spostando opportunamente la sagoma, disegnarne i contorni su di un foglio bianco e analizzare i ricoprimenti possibili.

6. Ripetere l'esperienza 5 con diverse sagome di poligoni regolari e non regolari.

7. Analizzare carte strutturate di tipo diverso riconoscendone moduli e regole di struttura.

8. *Esempi di trasformazioni geometriche**:
a) due simmetrie della stessa sagoma lungo assi diversi: *AB* e *CD* (cfr. fig. 1);

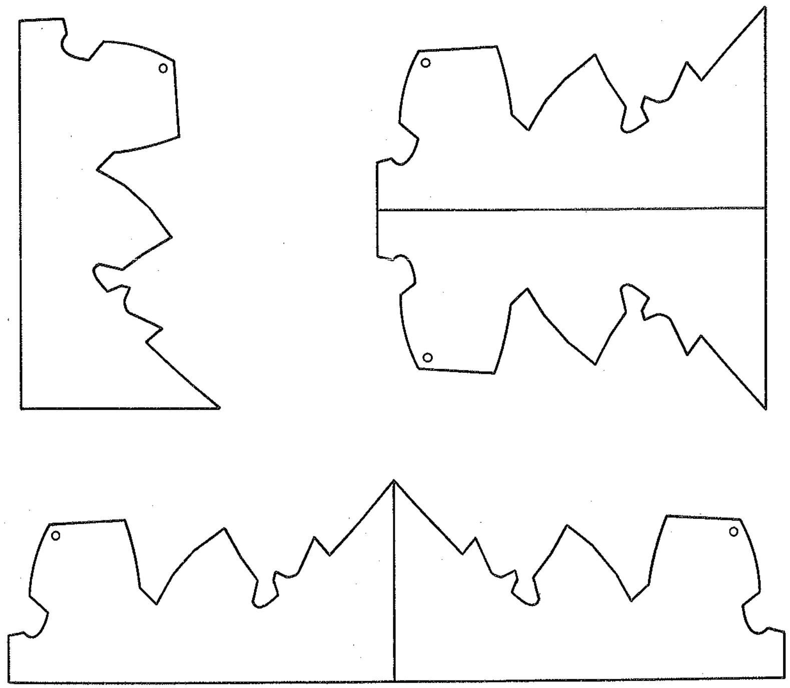


Figura 1

b) tre sagome di cartoncino, attaccate al foglio con lo scotch nei punti o segmenti segnati con x, permettono di realizzare ribaltamenti per ottenere figure simmetriche a quelle date. La sagoma in basso scorre lungo il filo: una traslazione di questa ha lo stesso effetto di due simmetrie della figura in alto (cfr. fig. 2);

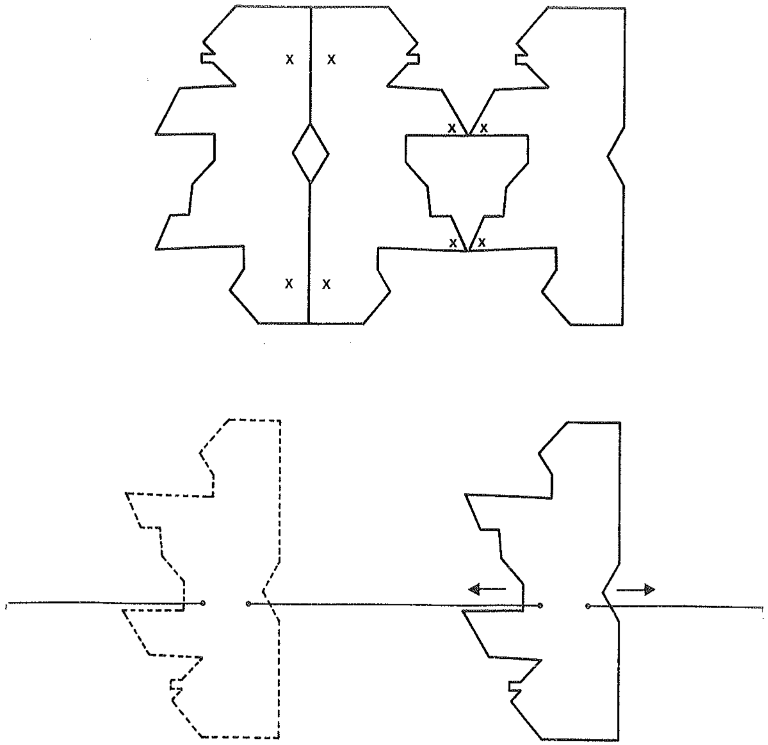


Figura 2

c) la barchetta (cfr. fig. 3) scorre sui due fili paralleli realizzando una traslazione nel piano;

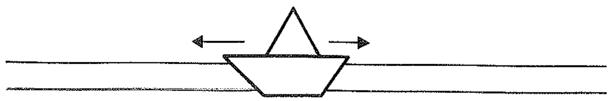


Figura 3

d) lo spago (cfr. fig. 4) può essere tenuto teso in qualunque direzione dello spazio. La sagoma scorre lungo lo spago: si realizza così una traslazione in un piano qualunque dello spazio;

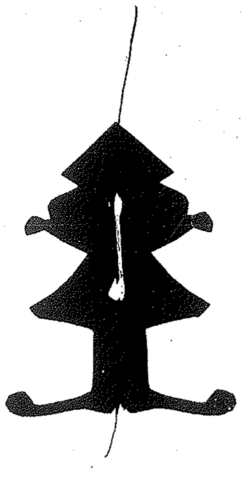


Figura 4

e) la sagoma rigata (cfr. fig. 5) può scorrere lungo lo spago. Lo spago può ruotare intorno all'automatico e può essere sollevato dal piano. Il modellino permette di realizzare traslazioni e rotazioni della sagoma nello spazio;

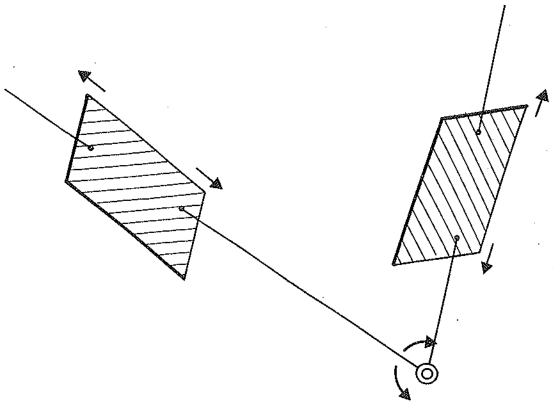


Figura 5

f) tre sagome uguali (cfr. fig. 6), ritagliate in carta colorata, possono scorrere sui tre fili attaccati al foglio con lo scotch rispettivamente nei punti *AB*, *CD*, *EF*. Le tre sagome possono arrivare a sovrapporsi per scorrimento. I tre fili materializzano le direzioni della traslazione di ogni sagoma nel piano;

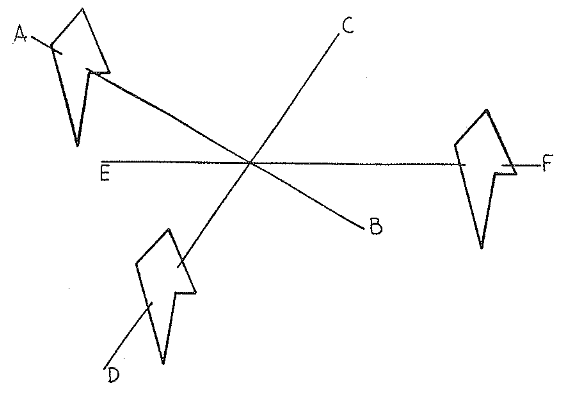


Figura 6

g) la sagoma di Pinocchio (cfr. fig. 7) è tale che il naso, il cappello, la pancia descrivono lo stesso cerchio intorno al centro della rotazione costituita da un automatico (traccia 1). Un cerchio concentrico, più grande del primo, è descritto dal tallone (traccia 2).

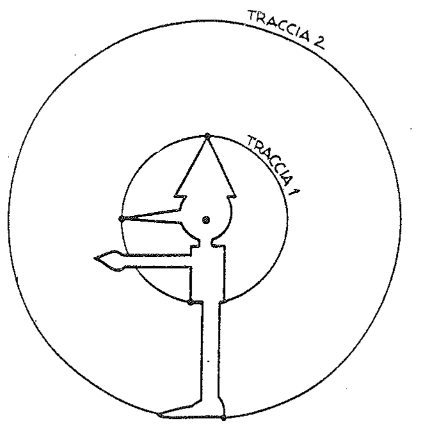


Figura 7

Scheda 3

La misura

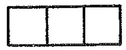
Si propone agli adulti di esplicitare per ciascuna delle attività seguenti gli obiettivi didattici.

1. Due amici, Luigi e Carlo, si trovano nella necessità di misurare la lunghezza di un muro nel modo più preciso possibile e non dispongono di strumenti. Sapresti dire come potrebbero fare?

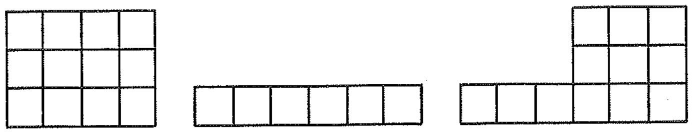
2. Stabilisci che l'unità per la misura delle lunghezze sia rappresentata dalla spessore del tuo indice e misura con tale unità la larghezza e l'altezza di un foglio protocollo. Le misure che hai ottenuto concordano con quelle del tuo compagno di banco? Se sì, perché? Se no, perché?

3. Se per unità di misura delle lunghezze fosse stata scelta, anziché il metro, un'altra unità, che chiameremo semimetro, di lunghezza metà del metro, quale sarebbe, in semimetri, l'altezza di un edificio alto 12 metri? E di una persona alta 1,80 metri? E di una sedia alta 0,50 metri?

4. Se l'unità per la misura delle aree fosse quella rappresentata dalla figura:



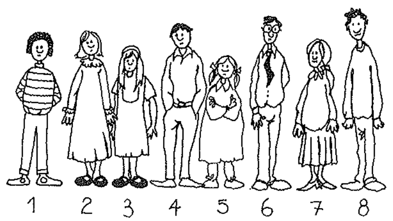
quali sarebbero le aree delle seguenti figure?



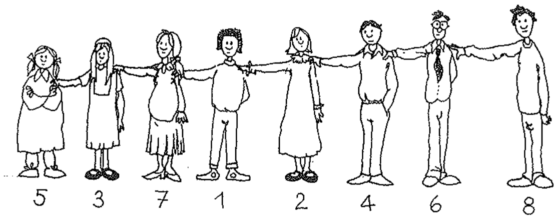
5. Se l'unità per la misura delle aree fosse il triangolo equilatero di lato 1 metro, quale sarebbe l'area dell'esagono regolare di lato 1 metro? E quella dell'esagono regolare di lato 2 metri? E quella del quadrato di lato 1 metro? E del pentagono?

6. Date due foglie, trovare un modo per stabilire quale delle due è più grande. Sovrapporre, ad esempio, alle due foglie la carta millimetrata trasparente. Ovviamente ne scaturisce una misura approssimata.

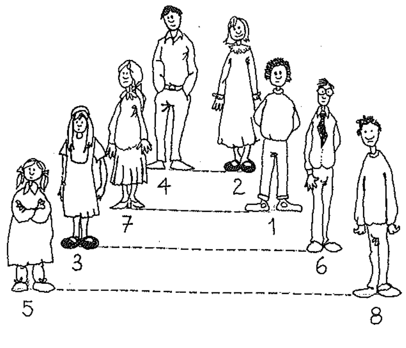
7. *Gioco corporeo*. Il gioco corporeo qui presentato, ideato da J. Sauvy e che potrebbe essere chiamato «alla ricerca delle composizioni», è proposto come stimolo iniziale. Si compone di due fasi successive, una di attività e una di riflessione e apertura di problemi (cfr. fig. 1).



a

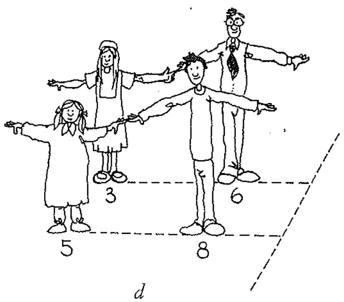


b

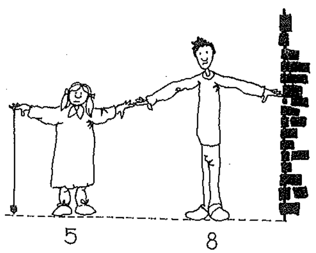


c

a: un allineamento di ragazzi in ordine alfabetico, ecc.
b: lo stesso allineamento dopo essersi messi *in ordine* per altezza crescente.
c: le persone si dispongono a triangolo o a trapezio.
d: si definiscono così delle coppie di persone che, avvicinandosi con le braccia tese e con la punta delle dita in contatto, realizzano l'*addizione* di due *aperture delle braccia*.
e: le coppie così formate si dispongono una dietro l'altra, a contatto con un muro. Con l'aiuto di un filo a piombo si segna sul terreno l'appiombo dell'altra estremità dell'*apertura delle braccia totale* (confronto di addizioni a 2 a 2, con *compensazioni approssimate*).



d



e

Figura 1. Schema di un gioco corporeo in cui intervengono «ordine» e «misura».

Per l'attività illustrata in figura 1, divisa nelle fasi da 1 a 5, è utile far mantenere il più possibile il silenzio per favorire l'ascolto dei comandi dati dall'insegnante e la riflessione su ciò che si sta facendo. Attenzione al numero dei partecipanti: se sono in numero pari o dispari occorrerà guidare in modo diverso la composizione delle coppie.

Nella fase di riflessione ci si chiede: che cosa abbiamo fatto? Siamo partiti da un ordinamento sulle altezze e abbiamo trovato qualcosa che riguarda l'apertura delle braccia. Si invitano allora i ragazzi a fare ipotesi sull'ordinamento delle aperture delle braccia, sul rapporto tra queste e le altezze, sui due ordinamenti. L'ordinamento sulle aperture delle braccia si può poi verificare direttamente ancora solo con confronti senza misure; sulla somma delle altezze nelle coppie si può lavorare anche con misure.

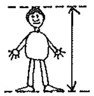
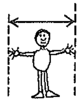
Se si vuole introdurre qualche osservazione di tipo statistico si può notare che la prima coppia (formata dai numeri 5 e 8) rappresenta l'intervallo di variazione delle misure delle altezze. La media delle altezze dell'ultima coppia (7,2) rappresenta la mediana delle altezze del gruppo se il numero dei ragazzi è pari; se il numero dei ragazzi è dispari è opportuno sistemarli «a triangolo» in modo che resti da solo, nel centro, il ragazzo con altezza mediana.

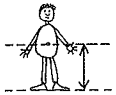
8. *Le misure del corpo** (attenzione! Tutte le misure devono essere espresse in cm).

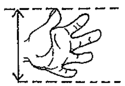
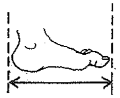
Cognome e nome ....

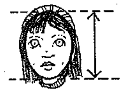
Sesso F M

Età in anni .... Nazionalità ....

Altezza ....  Apertura delle braccia .... 

Altezza dell'ombelico dal suolo .... 

Spanna ....  Lunghezza del piede ...... 

Dimensione della testa .... 

I dati raccolti possono essere lo spunto per elaborare statistiche e per fare grafici.

Ricerca di rapporti costanti nel corpo umano: dalle varie misure antropomorfiche è possibile scoprire che:
— l'altezza è circa uguale alla misura dell'apertura delle braccia;

— il rapporto altezza/spanna e quello altezza/testa risultano circa uguali: la misura della spanna e quella della testa sono circa uguali;
— la testa «entra» nelle spalle circa 2 volte;
— il rapporto altezza/altezza dell'ombelico da terra è quasi costante e risulta molto vicino a 1,6;
— il naso «entra» circa 3 volte e mezzo nella testa.

Con queste attività si può chiarire e approfondire il concetto di rapporto. Dire che *l'altezza della testa «entra» 7 volte nell'altezza totale* oppure che *l'altezza totale è 7 volte la testa* è lo stesso dal punto di vista del significato, ma dal punto di vista grammaticale è diverso: si scambia il complemento col soggetto.

Così se vogliamo esprimere le 2 affermazioni con 2 rapporti, questi risulteranno diversi:

testa = 1/7 altezza	testa 1 altezza 7
altezza = 7 teste	altezza 7 testa 1

quindi 1/7 e 7 sono uno l'inverso dell'altro.

9. *Disegno della sagoma del proprio corpo** (materiale: un foglio di carta da pacchi di lati non inferiori ai 2 metri, pennarello grosso).

Sul foglio appeso al muro o steso sul pavimento si disegna il contorno della sagoma di una persona del gruppo. La persona è appoggiata al foglio con le braccia aperte e le gambe unite. Sul disegno si verifica se la sagoma è inscritta in un quadrato e/o in un cerchio, confrontandola con il disegno di Leonardo da Vinci (cfr. fig. 2). Poi si cerca il punto che nel disegno corrisponde al centro della sagoma (incontro delle diagonali del quadrato). Infine, si verifica sulla persona di cui si è disegnata la sagoma se questo punto risulta più alto o più basso dell'ombelico.

10. *Scelta di un modulo per rappresentare le proporzioni delle parti del corpo.* Si prende come «modulo» la misura dell'altezza della testa o una spanna o un'altra parte del corpo e si vede quante volte «entra» nell'altezza del busto, nelle gambe e nelle braccia.

11. *Costruzioni di «mostri»**. Si rappresenta sul foglio la sagoma del proprio viso visto di profilo o di fronte, in scala 1:1.

Di profilo: Si tracciano 4 segmenti paralleli (cfr. fig. 3) e tra il più basso e il più alto si inscrive il viso.

Di fronte: si disegna l'ovale del viso e vi si colloca la sagoma del naso; si traccia una linea verticale (cfr. fig. 4) che rappresenta l'asse di simmetria della figura.

A partire da queste figure, si operano delle deformazioni:
— si variano i rapporti tra le parti;
— si omette la simmetria;
— si fanno entrambe le cose.

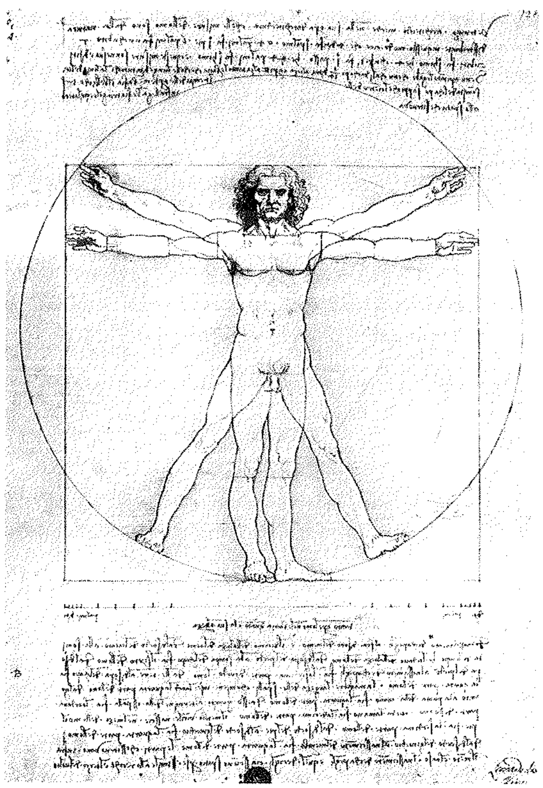


Figura 2

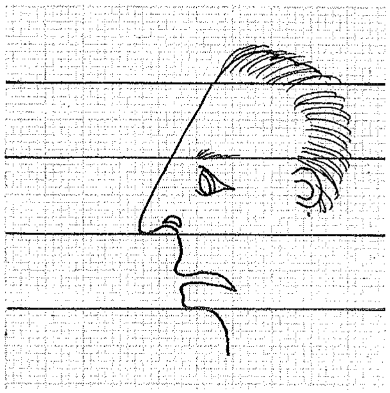


Figura 3

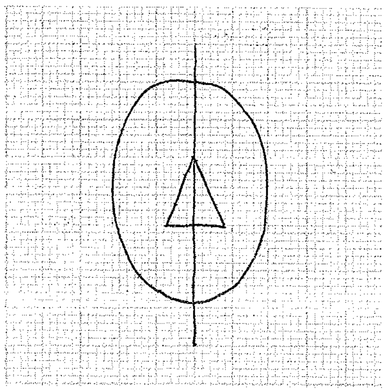


Figura 4

12. *La candela segna tempo**. Dal museo del Planetario di Buenos Aires: «*L'orologio di fuoco*. Antichissima sveglia di origine orientale. Al consumarsi della candela si staccano le palline di metallo che, cadendo nel piattino, producono i suoni che indicano le ore marcate in precedenza».

Su ogni candela (cfr. fig. 5) vengono infilati lateralmente dei chiodini o stuzzicadenti con un piombino sull'estremo libero. Ognuno può disporli a distanze diverse uno dall'altro. Accesa la candela, i chiodini cadono via via nel piattino sottostante producendo un suono. Come disporre i chiodini in modo tale che i suoni si abbiano ad intervalli regolari di tempo? Come disporre i chiodini in modo tale che i suoni si abbiano ogni 5 minuti?

Le scoperte e le osservazioni portano a riflettere sulle relazioni tra il tempo e lo spazio.

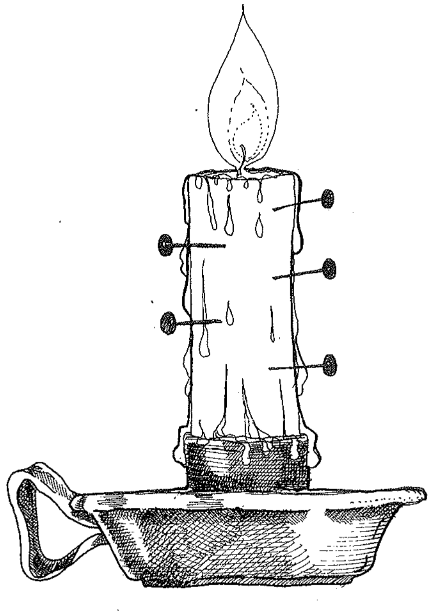


Figura 5

Scheda 4

L'organizzazione nello spazio e i sistemi di riferimento

L'elenco delle situazioni è rivolto all'insegnante: le schede non sono da dare in mano al bambino.

Il «Signor O». È un pupazzo cui si colora il braccio destro di rosso in modo da distinguerlo bene dal sinistro:

a) metti il «Signor O» su un tavolo ed elenca alcuni oggetti:
— alla sua destra;
— alla sua sinistra;
— davanti a lui;
— dietro di lui;
— sopra di lui;
— sotto di lui;

b) ora spostati (fai, ad esempio, 1/4 di giro o 1/2 giro intorno al tavolo) e stabilisci, rispetto al «Signor O», la posizione degli oggetti nominati in a;

c) sposta (ad esempio ruota di 1/4 o di 1/2 giro) il «Signor O». Come vede ora il «Signor O» gli oggetti nominati in a?

d) sposta un oggetto in modo da portarlo:
— dalla destra del «Signor O» alla sua sinistra;
— dalla sinistra alla destra;
— da sopra a dietro;
— da sotto a sinistra, ecc.;

e) il «Signor O» invita il suo amico «Signor Q» (è chiaro che si possono inventare molti altri casi, anche con più personaggi). Sono in piedi sul tavolo uno di fronte all'altro (molto vicini):
— quali oggetti vengono visti dai due allo stesso modo?
— quali oggetti vengono visti dai due in modo diverso?

f) il «Signor O» e la sua immagine allo specchio. Poni uno specchio davanti al «Signor O». Considera la sua immagine e stabilisci la posizione di alcuni oggetti rispetto a quell'immagine. Ripeti l'operazione, sistemando lo specchio alle spalle del «Signor O». Metti un oggetto in modo che si trovi alla sinistra dell'immagine del «Signor O».

Scheda 5

L'orientamento

1. *Angoli nello spazio.* Perché il concetto di angolo venga costruito e assimilato dal bambino nei suoi due aspetti (parte del piano limitata da due semirette di origine comune, rotazione di una semiretta attorno all'origine), gli angoli non devono essere solo disegnati, ma devono inizialmente essere percepiti nello spazio tridimensionale, prima a livello intuitivo e poi con il ricorso alla misura.

Si devono, quindi, presentare molteplici occasioni. Tra le più semplici ci sono:

— piegature della carta, caleidoscopio;
— parti di un cerchio (mezzo giro, un quarto di giro, quasi un giro completo);
— angoli fatti con le braccia e angoli descritti dal proprio corpo che ruota su se stesso;
— angoli che segnano cambiamenti di direzione in giochi e percorsi.

Per «prendere» l'angolo, si può usare un semplice strumento costituito da due stecche di legno incernierate a una estremità, un grande «compasso di legno». Si apre lo strumento accostandolo all'occhio e puntando una stecca su un oggetto e traguardando con l'altra il secondo oggetto. La lunghezza delle due stecche è del tutto arbitraria.

Per avere anche una prima valutazione dell'ampiezza dell'angolo, si può usare un «cartone misura-angoli» formato da un cerchio di cartone, ad esempio un fondo bianco per torte, con due lancette, l'una fissa e l'altra mobile. Su di esso si possono segnare semplicemente le frazioni di angolo giro (oppure lo si può suddividere in gradi).

Per misurare distanze angolari tra oggetti nello spazio, anche inaccessibili (quali le stelle) un metodo semplice ed economico, e anche coinvolgente emotivamente, è il «metodo dei palmi» che si basa su un rapporto del nostro corpo, quasi costante negli individui: rapporto tra la distanza dall'occhio alla mano, col braccio ben teso e l'ampiezza del palmo (dal pollice al mignolo) con la mano ben aperta, o l'ampiezza del pugno o di un dito (cfr. fig. 1).

Ad esempio, il diametro apparente del disco del Sole, che è uguale a quello della Luna piena, vale 1/2 grado: per coprire tale ampiezza basta il dito mignolo, col braccio ben teso.

In pratica potremo misurare con la mano alcune note costellazioni: l'Orsa Maggiore, Orione, ecc.; una volta note le loro dimensioni, potremo regolarci per stimare la grandezza delle altre costellazioni. Anche la conoscenza della distanza angolare di certe stelle può servire come scala: ad esempio, le ultime stelle del Grande Carro distano fra loro 5 gradi.

Per passare a misure più precise, e meglio confrontabili, si può usare la *balestra astronomica* o *celeste* (cfr. fig. 2). Per la sua realizzazione

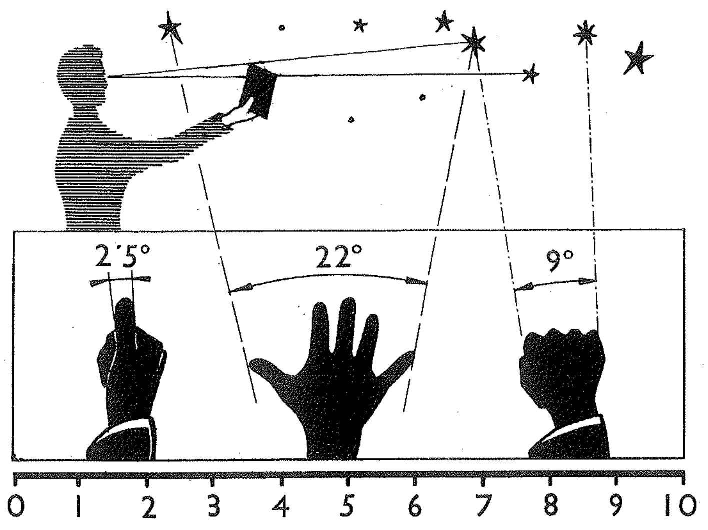


Figura 1

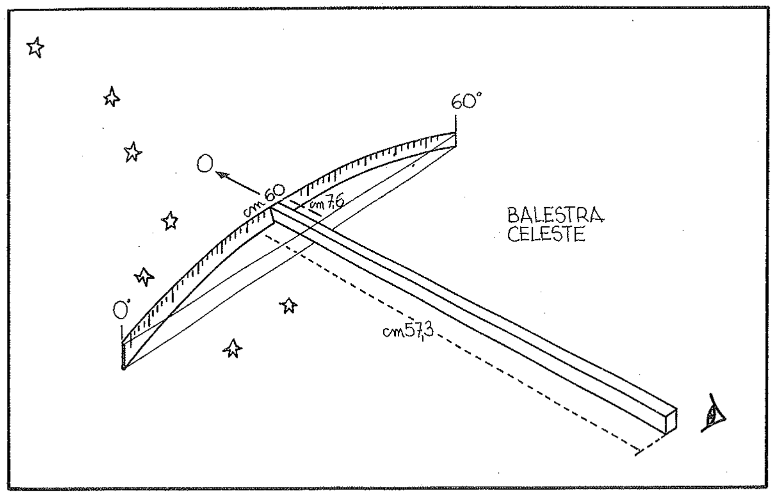
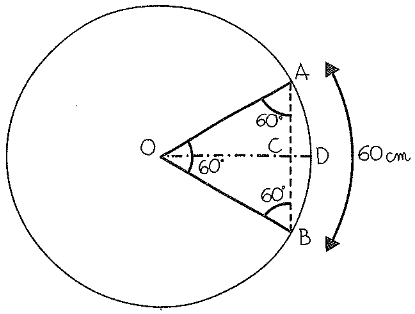


Figura 2

si richiede solamente un'asta centimetrata flessibile lunga 60 cm, un bastone lungo 57,3 cm e un pezzo di spago.

Si attacca il punto di mezzo dell'asta a una delle estremità del bastone, mentre con lo spago si uniscono le estremità dell'asta che, tendendo lo spago, assume una forma curva.

La curva deve essere tale che la distanza (cfr. fig. 3) tra lo spago e il punto di attacco sia di 7,6 cm. Si può applicare della vernice luminosa in corrispondenza delle tacche dei centimetri, se lo si desidera.



$AB = 57,3$ cm
$AC = CB = 28,6$ cm
$OC^2 = OA^2 - AC^2$
$OC^2 = 3283,3 - 817,9 = 2465,4$
$OC = 49,7$ cm
$CD = 57,3 - 49,7 = 7,6$ cm

Figura 3

A questo punto, quello che resta da fare è di puntare lo 0 della balestra celeste verso uno dei due oggetti tra i quali si vuole determinare la distanza (tenendo appoggiata allo zigomo l'estremità libera del bastone) e leggere il numero di centimetri (che corrisponde al numero di gradi) tra gli oggetti (ad esempio due stelle); la distanza angolare tra i due oggetti si legge sull'arco della balestra.

La balestra celeste, nella forma qui presentata, è uno strumento relativamente recente (XVIII secolo), ma si basa sul principio della «Diottra di Archimede» del III secolo a.C. e del «Bastone di Giacobbe» (XIV secolo).

Un cerchio di 360 cm di circonferenza è tale che 1 cm corrisponde a un angolo al centro di 1 grado e il raggio di tale cerchio è:

$$r = 360/2\pi \quad \text{ovvero} \quad r = 57,3 \text{ cm}$$

con un'approssimazione al millimetro.

Da osservazioni ripetute del cielo, all'aperto o attraverso una finestra, è possibile far ricostruire ai bambini la «mappa di alcune note costellazioni» (l'Orsa Maggiore, Cassiopea, Orione, ecc.), misurare il diametro della Luna, seguire lo spostamento di una stella rispetto a un punto dell'orizzonte al passare delle ore o in notti successive. Queste attività sono spunti di riflessione per l'insegnante, che vogliono soprattutto suggerire una metodologia.

2. *Come si traccia la perpendicolare della retta Nord-Sud da un punto A.* La retta Nord-Sud può essere tracciata come direzione delle ombre al mezzogiorno solare locale o, meno precisamente, attraverso l'uso di una bussola.

Una volta tracciata sul terreno la direzione NS (cfr. fig. 4), piantare un bastoncino su un punto di questa traccia (*A*); con un pezzo di spago e un bastoncino appuntito si può realizzare un compasso con cui tracciare i tratti di cerchio *B* e *B'* equidistanti dal punto *A*.

Ripetere la stessa operazione fissando lo spago del compasso prima su *B* poi su *B'* in modo che i nuovi tratti di cerchio si incrocino fra loro nei punti *C* e *C'*. Unendo con una retta questi due punti si otterrà la perpendicolare alla retta NS, passante per il punto *A*. Due rette sono perpendicolari quando, incontrandosi, formano 4 angoli retti (un angolo retto misura 90 gradi).

Una retta orizzontale, ad esempio, è sempre perpendicolare a una retta verticale.

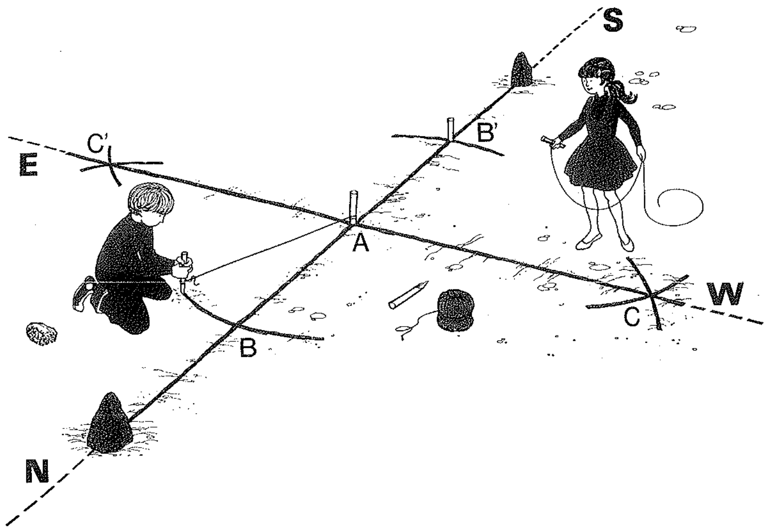


Figura 4

3. *Coordinate geografiche* (si consiglia di usare un mappamondo). Tu sai che la Terra, con una certa approssimazione, può somigliare a una sfera, schiacciata ai poli. Come è possibile trovare un sistema di riferi-

mento che ci consenta di indicare ciascun punto della superficie terrestre?

Nella figura 5 puoi vedere il sistema di riferimento impiegato dai geografi; esso è costituito da meridiani e paralleli. I meridiani si possono immaginare generati da piani che tagliano la superficie terrestre passando per l'asse della terra; i paralleli da piani, appunto paralleli, perpendicolari all'asse terrestre.

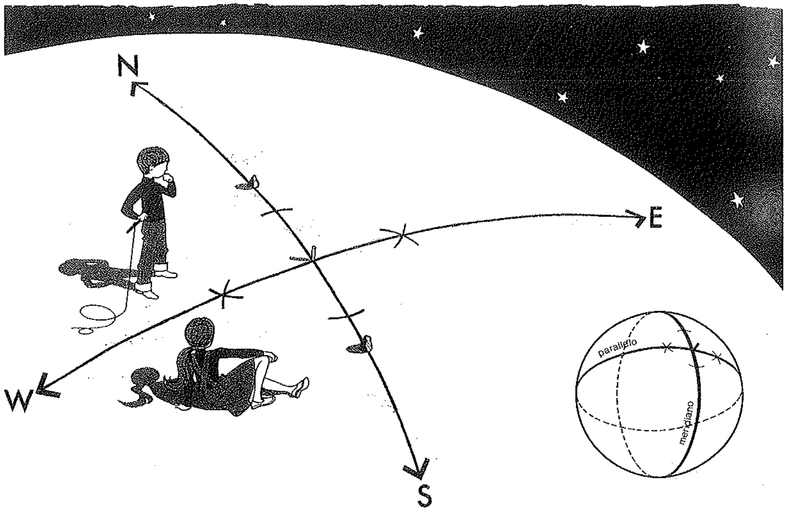


Figura 5

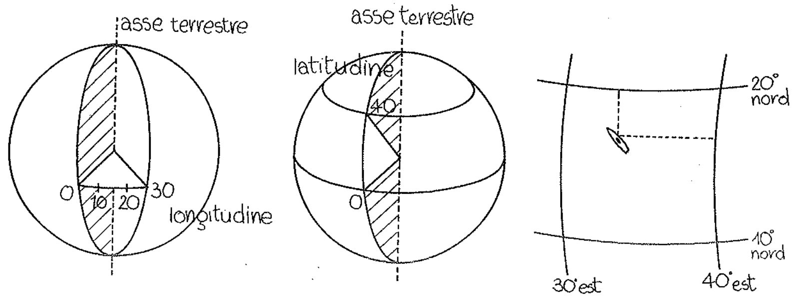
La posizione di ciascun punto viene indicata da due misure angolari, come puoi vedere in figura 6. La misurazione fatta lungo i meridiani viene detta *latitudine*; quella fatta lungo i paralleli è chiamata *longitudine*.

4. *Punti cardinali*:

a) *le direzioni cardinali*. Si individua con i bambini l'orientamento delle quattro pareti che delimitano l'aula scolastica e in quale direzione si aprono le finestre; tale orientamento è da collegare al corso diurno del Sole che determina il soleggiamento;

b) *la rosa dei venti*. Assumendo come centro di riferimento l'edificio scolastico, si fa descrivere quali elementi del territorio prossimo alla scuola si trovano a Nord, quali a Sud, a Est, a Ovest; si indicano magari più elementi nella stessa direzione, valutando qual è più vicino, qual è più distante, per passare ai quartieri della città o a elementi geografici.

Costruito uno schema grafico, lo si arricchisce via via, consideran-



Si considera come meridiano di riferimento quello passante per Greenwich.

Si considera come parallelo di riferimento il cerchio massimo, chiamato *equatore*.

Si considera la parte della superficie sferica della Terra. In figura, puoi indicare la posizione di una nave con latitudine 17 gradi Nord, longitudine 34 gradi 20' Est.

Figura 6

do le direzioni intermedie (Nord-Est, Sud-Est, Sud-Ovest, Nord-Ovest). L'attività può essere ripetuta cambiando il centro di riferimento, ad esempio la piazza che tutti i bambini conoscono o l'abitazione di ciascuno.

5. *Orientamento su una carta geografica*. Si può costruire su carta da lucidi un cerchio con un raggio di 3 cm e dividerlo in 8 parti uguali tracciando i 4 diametri che corrisponderanno alle direzioni della rosa dei venti. Si sovrappone il quadrante alla carta geografica con il centro in corrispondenza della località che interessa e con il diametro NS sul meridiano che passa per essa. Si possono, quindi, fare varie esercitazioni (indicare in quale direzione si trova una certa città, ecc.). Attenzione! Il quadrante può essere usato, senza commettere grandi errori, sulla carta geografica là dove meridiani e paralleli sono quasi perpendicolari tra loro.

6. *Orientamento di una carta topografica sul terreno* (occorre procurarsi, per questo lavoro, una cartina geografica o una pianta di città). Si poggia la bussola sulla carta e si fa ruotare la carta in modo che l'ago sia disposto parallelamente a un bordo laterale della carta (carta e bussola, naturalmente, devono trovarsi sul piano orizzontale). In questo modo il Nord della carta coincide con il Nord geografico. Guardandosi attorno, si vedono gli oggetti sul terreno, rappresentati sulla carta, nelle stesse direzioni che sulla carta stessa.

7. *Introduzione al sistema di riferimento cartesiano*:

a) si consideri l'itinerario proposto come indicativo e se ne costruiscano delle varianti. *Itinerario possibile:*

— quadrettature, tabelle a doppia entrata (cfr. pp. 87-88);
— localizzazione di una casella come incrocio di due strade, una colonna e una riga;

— giochi tipo «battaglia navale»; consultazione delle cartine topografiche «tutto città»; ricerca di una località sull'atlante geografico e sul mappamondo; uso di simboli (una lettera e un numero) per descrivere una casella;
— attività «la posizione nell'aula»; necessità di esplicitare gli elementi di riferimento; successive schematizzazioni di una situazione reale; introduzione della coppia ordinata di numeri.

La posizione nell'aula: si chiede a ogni bambino di descrivere su un foglietto la sua posizione nella classe, senza scrivere i nomi. Si ritirano i foglietti e se ne leggono alcuni; i bambini devono riconoscere chi ha scritto il foglietto, ma spesso le indicazioni non sono sufficienti. La discussione conduce alla scelta del riferimento delle pareti dell'aula, quella della porta e quella della cattedra (ci si orienta allora con file e banchi).

In un secondo tempo si chiede di rappresentare con un disegno la disposizione dei banchi nell'aula. I bambini, lasciati liberi, fanno un disegno molto realistico, illustrando anche particolari che non servono ai fini dell'orientamento. Se ne discute, per passare dal disegno libero a una piantina schematica: sono necessarie le due pareti e le file dei banchi, anzi ogni banco può essere considerato come l'insieme dei due posti. Il banco si riduce a un rettangolo, le file sono file di «posti», si elimina lo spazio tra le file, ecc.

Si arriva, così, al quadrettato (numero file di posti e numero banchi per fila, le pareti di riferimento sono due assi ortogonali orientati). Ci si serve della piantina per indicare oralmente la posizione di questo o quell'alunno. Alla fine si eliminano le parole «posto» e «banco», arrivando alla convenzione della coppia ordinata di numeri.

La ricerca di una camera nel palazzo: si costruisce un modellino, il «palazzo», con scatole di fiammiferi uguali o con piccoli cubi. La posizione di alcuni cubi diversamente colorati (stanze) sarà definita facilmente da tre parametri;

b) *reticoli*. Attività possibili:
— *il dettato di una figura*. Per comunicare una figura disegnata su carta quadrettata (figura poligonale), senza far vedere il foglio, è necessario localizzare sul foglio i punti significativi. Viene spontaneo scegliere come elementi cui far riferimento i margini del foglio. Un bambino detta, per ogni punto, la distanza (in quadretti) dal margine sinistro e la distanza dal margine inferiore. L'altro bambino segna sul foglio il punto corrispondente. Per facilitare le operazioni, ci si accorda sull'ordine di lettura delle distanze dai margini (è sufficiente riferirsi a rette ortogonali parallele ai margini);
— *il geopiano*. Come è noto, il geopiano è una tavoletta di forma quadrata su cui sono piantati chiodi disposti a scacchiera, a uguale distanza uno dall'altro. Viene usato, ad esempio, per formare poligoni tendendo elastici chiusi, tra chiodo e chiodo. La posizione dei chiodi del reticolo è individuabile con una coppia ordinata di numeri.

Scheda 6

I percorsi

1. Si predispongono esperienze didattiche graduate per i singoli punti dell'*elenco A* utilizzando tra gli altri i materiali dell'*elenco B* e tenendo presente che l'argomento è trasversale:
— ai vari aspetti trattati nel capitolo sull'«orientamento» (uso di coordinate naturali, uso del piano quadrettato, uso di coordinate polari);
— ad altre tematiche disciplinari (combinatoria, informatica).

Elenco A. Aspetti concettuali e abilità in gioco:
— prestare attenzione agli elementi di riferimento, in situazioni reali e in esercizi grafici;
— riconoscere e definire gli elementi di uno spostamento (punto di partenza e punto di arrivo, direzione e cambiamento di direzione, verso, distanze) in situazioni reali e in esercizi grafici;
— interpretare le istruzioni di un percorso assegnato attraverso rappresentazioni grafiche e con l'uso di simboli;
— rappresentare un percorso seguendo una quadrettatura o no, ecc.

Elenco B (spunti di lavoro):
— dall'osservazione di foto ben scelte, far ricostruire una storia;
— descrivere un percorso;
— giochi e attività motorie;
— percorsi su cartine topografiche «tutto città»;
— esercizi tipo labirinti.

2. *Tabelle a doppia entrata**:

a) si chiede di colorare secondo l'indicazione la strada del verde e quella del viola fino alla casella d'incrocio che verrà colorata in verde-viola (cfr. fig. 1);

	ROSSO	GIALLO	AZZURRO	VIOLA
ARANCIO				
VERDE				VERDE VIOLA
INDACO				

Figura 1

b) anche in questo caso le righe e le colonne sono viste come strade dalle quali non si può uscire. Il passaggio da una casella a quella contigua è un passo. Quanti passi devono fare nella loro strada Franco, Giovanni, Alberto per incontrarsi con Emilio, Mario, Carlo? (cfr. fig. 2);

EMILIO			
MARIO			
CARLO			
	FRANCO	GIOVANNI	ALBERTO

Figura 2

c) la nozione di «coppia ordinata»: il bambino deve distinguere le parole «rema» da «mare», «nano» da «nona» e riconoscere che, al contrario di mano, la parola «noma» non ha senso (cfr. fig. 3).

	ma	re	na	no
ma		mare		
re	rema			
na				nano
no			nona	

Figura 3

3. *Bersaglio polare**. Il bersaglio (cfr. fig. 4) è costruito su un disco di polistirolo sul quale è tracciato un riferimento polare (al posto dei gradi si possono usare numeri disposti come sul quadrante di un orologio). Si gioca in due. A turno, uno detta le coordinate dei punti e l'altro deve mettere la freccia sul bersaglio nella posizione indicata. Se l'operazione è eseguita correttamente si ottiene un punto.

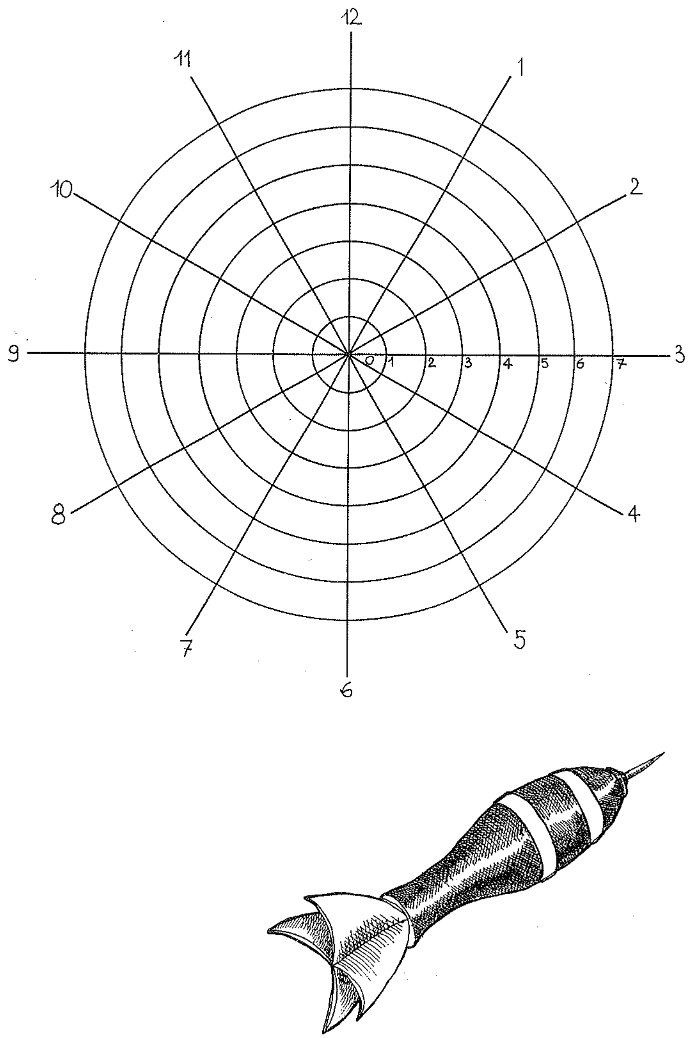


Figura 4

4. *Battaglia polare**. Si gioca come a battaglia navale. Ognuno dispone di 10 aerei (rappresentati da punti disposti a piacere sul proprio riferimento polare) e, indicando le coordinate, deve «colpire» gli aerei dell'avversario (cfr. fig. 5).

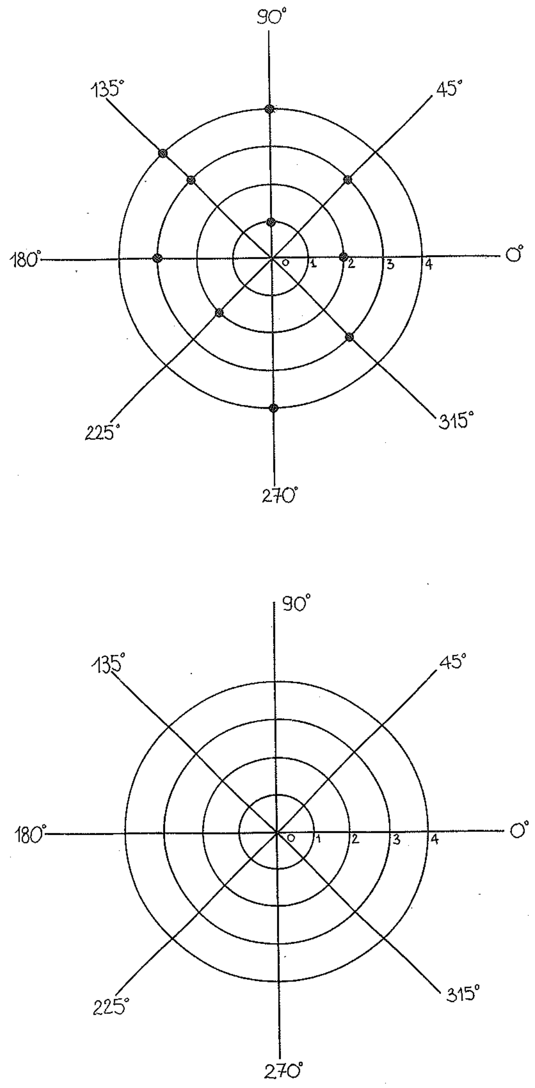


Figura 5

5. *Percorsi su carta polare*. Le regole del gioco (cfr. fig. 6) sono:
— si possono effettuare spostamenti solo sui raggi o sugli archi di cerchio;
— le coordinate del punto mobile (che può essere costituito da una matita colorata che segna il percorso) vengono indicate con la distanza dal punto da cui ogni volta ci si sposta lungo i raggi e con l'ampiezza dell'angolo lungo le circonferenze;
— la distanza può essere positiva o negativa a seconda che si vada verso il centro o ci si allontani da questo;
— per inventare un gioco si possono, ad esempio, aggiungere degli ostacoli lungo il percorso.

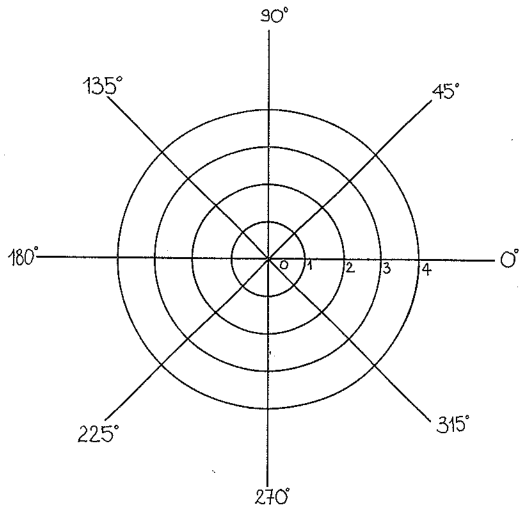


Figura 6

6. *Dettato polare sulla carta del cielo*. Su un foglio con riferimento polare, in cui il centro dei cerchi corrisponde al polo Nord celeste (quasi coincidente con la stella Polare), si segnano le posizioni delle stelle più luminose della costellazione prescelta.

In questo caso, le due coordinate che individuano un punto sono una espressa in angoli e l'altra in ore: ogni cm di distanza di un cerchio dal centro è pari a 10° di *declinazione*, che corrisponde alla latitudine sulla Terra, ed è espressa in gradi.

La declinazione di un astro è 0° all'equatore e 90° al polo Nord. L'equatore celeste è la proiezione dal centro della Terra sulla volta celeste dell'equatore terrestre.

Per gli astri dell'emisfero Sud (tra l'equatore celeste e il polo Sud) la declinazione è negativa.

La distanza angolare tra la direzione del raggio su cui si trova un astro e la direzione scelta come riferimento è l'*ascensione retta* dell'astro. La direzione di riferimento coincide con la proiezione di un meridiano celeste, e precisamente quello che passa per i poli e il punto gamma (incontro dell'equatore celeste con l'eclittica nel 1° grado dell'Ariete). L'ascensione retta è espressa in ore secondo la seguente relazione:

$$360 \text{ gradi} : 24 \text{ ore} = 15 \text{ gradi} : 1 \text{ ora}$$

Il verso di rotazione è orario. L'ascensione retta di un astro corrisponde alla longitudine sulla Terra.

Tabella 1. Orsa Maggiore.

	Stelle	*Ascensione retta* *ore*	*minuti*	*Declinazione* *gradi*	*primi*
α	Dubhe 124	11	00	62	01
β	Merah 99	10	58	56	39
γ	Phekda 84	11	51	53	58
δ	Megrez	12	13	57	19
ϵ	Alioth 81	12	51	56	14
ζ	Mizar	13	21	55	11
η	Benetnash 101	13	45	49	34
ϑ		9	29	51	54
ι	Talitha	8	55	48	14

Con i dati della tabella 1 (l'ascensione retta e la declinazione), relativa alle 9 stelle dell'Orsa Maggiore, è possibile, su un riferimento polare, ricostruire la forma della costellazione (cfr. fig. 7).

Un lavoro analogo è ovviamente possibile per ogni costellazione di cui siano note le coordinate delle stelle.

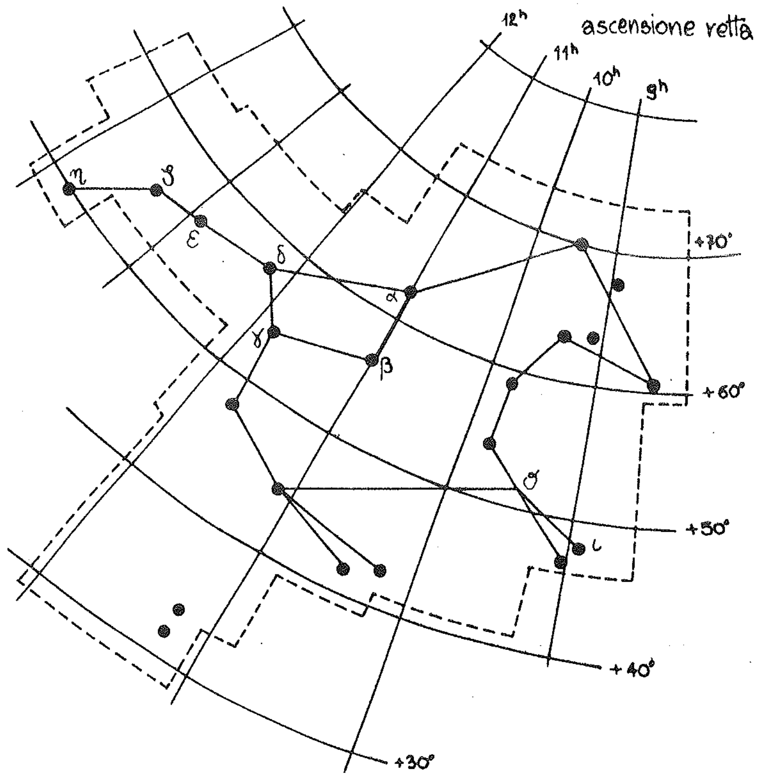


Figura 7

Scheda 7

I giochi con le forme

1. Descrivi i due disegni di figura 1. Per ciascuno indica:
— qual è lo sfondo?
— qual è la figura?

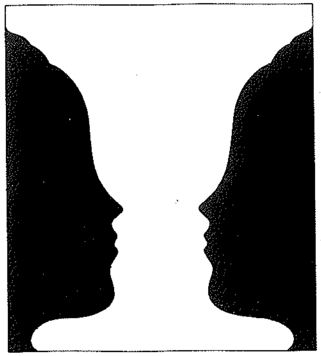


Figura 1

2. Taglia un foglio con le forbici e butta i pezzetti sul tavolo in disordine:
— ricomponi il foglio tagliato;
— come hai proceduto?
— quali difficoltà hai incontrato?
— i pezzi presentano tutti la stessa faccia in alto?

3. Eseguendo le istruzioni puoi costruirti il tangram (cfr. fig. 2) e divertirti a realizzare qualsiasi figura, lettera o cifra:
— prendi un foglietto quadrato;
— piegalo secondo una diagonale; taglia;
— prendi uno dei due triangoli e dividilo in due triangoli uguali; taglia e scrivici i numeri 1 su uno e 2 sull'altro;
— prendi l'altro triangolo metà del quadrato; porta il vertice corrispondente all'angolo retto sul punto medio dell'ipotenusa; piega e taglia; scrivi il numero 3 sul triangolo ottenuto;
— piega il trapezio in modo da ottenere due trapezi rettangoli uguali;
— prendi uno dei due trapezi, piegalo sovrapponendo l'altezza sulla base minore; taglia e scrivi sul triangolo il numero 4 e sul parallelogramma il numero 5;

— prendi l'altro trapezio e piegalo, dividendo a metà la base maggiore in modo da ottenere un quadrato e un triangolo sui quali scrivere rispettivamente 6 e 7.

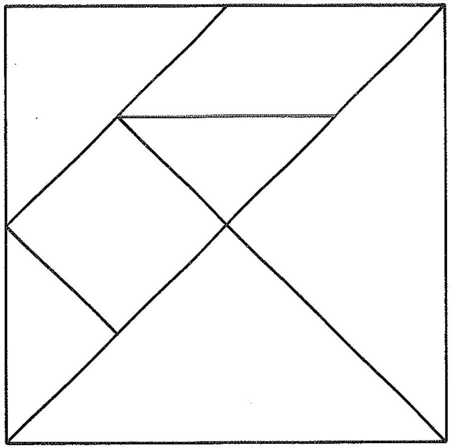


Figura 2

4. Prendi un foglio bianco e piegalo a tuo piacere:
— cosa osservi?
— individua delle figure e colorale.

5. Colora la carta dell'Altair Design di figura 3. Quali forme hai individuato?

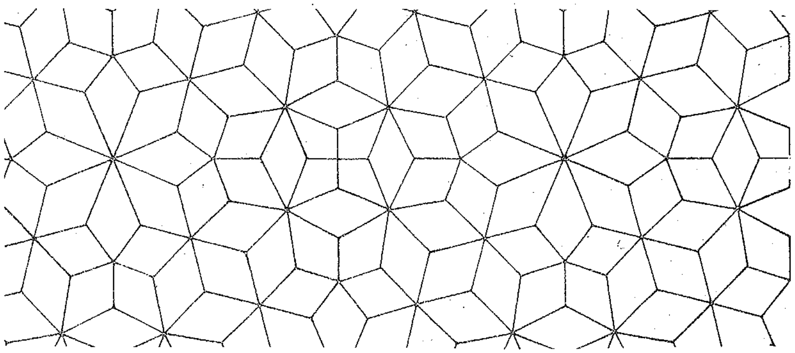


Figura 3

Scheda 8

Le classificazioni

1. Disponi le penne che hai in ordine crescente e decrescente rispetto alla lunghezza. Suggerisci altri criteri per ordinarle o farne classificazioni. Esercizi del genere si potranno ripetere con materiali diversi e nelle più svariate situazioni; ad esempio, classificare e ordinare i bambini della classe, o un insieme di sassi oppure di prodotti commerciali.

2. Colora (cfr. fig. 1) allo stesso modo le figure di uguale forma. Suggerisci altri criteri per farne ordinamenti o altre classificazioni.

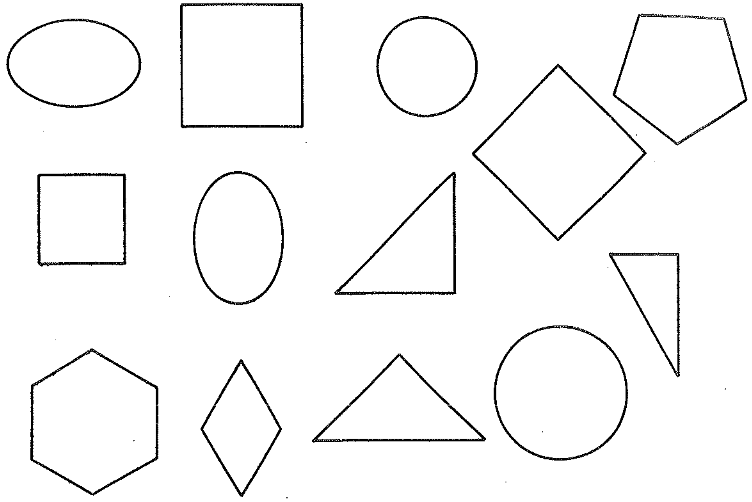


Figura 1

3. Unisci (cfr. fig. 2) con una freccia le figure formate con «pezzi uguali».

4. Raggruppa (cfr. fig. 3) le figure di forma uguale:
— disponi gli elementi di ciascun insieme in ordine crescente;
— riporta il numero che contrassegna la figura indicata nella tabella.

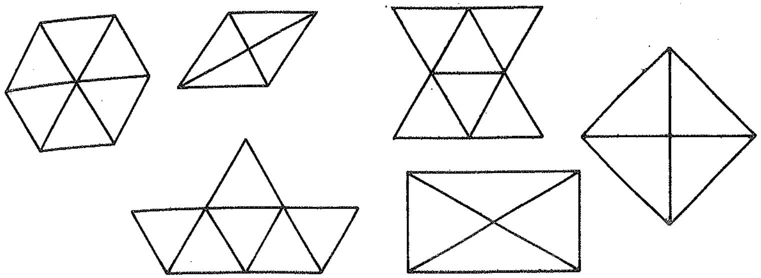


Figura 2

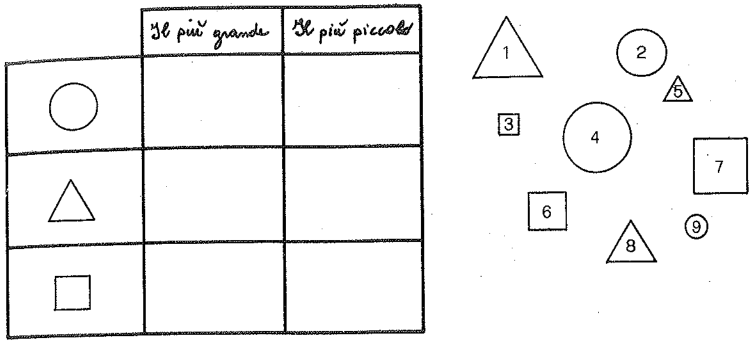


Figura 3

Scheda 9

Le attività con le figure geometriche elementari

All'interno del seguente gruppo di schede di lavoro è definito un itinerario: esse sono quindi da considerarsi in ordine sequenziale.

1. *I trapezi*:
— disegna e colora una striscia sul tuo quaderno;
— ritaglia da un foglio di carta translucida un triangolo;
— applica il triangolo con un automatico (o un fermacampione) sul foglio in modo che possa sovrapporsi, in parte, alla striscia di carta;
— facendo ruotare il triangolo sulla striscia colorata otterrai quadrilateri diversi con una caratteristica comune: una coppia di lati paralleli;
— questi quadrilateri si chiamano trapezi (cfr. fig. 1).

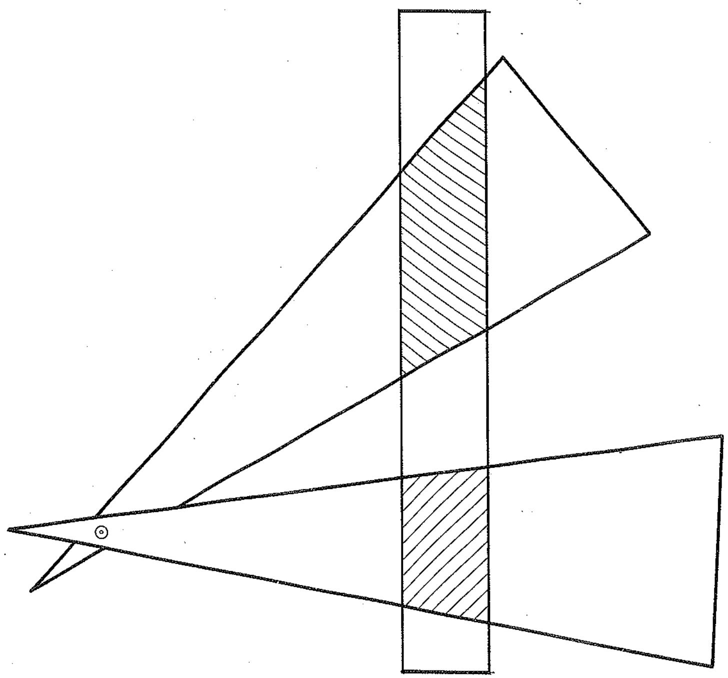


Figura 1

2. *I parallelogrammi:*
— disegna e colora una striscia in basso sul quaderno;
— prepara due strisce di carta translucida: una della stessa altezza della striscia disegnata, l'altra di altezza diversa;
— appunta in alto le due strisce (distanti una dall'altra) con due automatici (o fermacampioni);
— fai ruotare le due strisce translucide sulla striscia disegnata e colorata; otterrai diversi tipi di quadrilateri che hanno però una caratteristica comune: due coppie di lati paralleli;
— questi quadrilateri si chiamano parallelogrammi.

3. *I rombi e i rettangoli:*
— le figure ottenute ruotando la striscia translucida della stessa altezza della striscia disegnata appartengono alla famiglia dei .... perché hanno .... Se la striscia translucida è perpendicolare alla striscia di carta colorata otterrai un .... perché ha ....;
— le figure, ottenute ruotando la striscia translucida di altezza diversa, sono tutti i possibili parallelogrammi che puoi ottenere con l'intersezione delle due strisce. Come si chiama il parallelogramma che ottieni quando le due strisce sono perpendicolari?

4. *I quadrilateri convessi*. Inserisci i quadrilateri che hai ottenuto nel diagramma di figura 2.

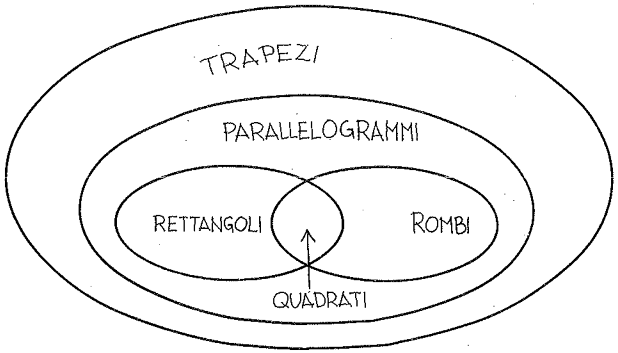


Figura 2

5. *La simmetria*:
— analizza i parallelogrammi usando il criterio della simmetria (ricorda che tutti i parallelogrammi sono provvisti di simmetria centrale);
— costruisci un modellino per verificare la simmetria centrale di un parallelogramma generico;
— quanti assi di simmetria ha il parallelogramma generico? Costruisci il modellino;

— quanti assi di simmetria ha il rombo? Costruisci il modellino;
— quanti assi di simmetria ha il rettangolo? Costruisci il modellino;
— quanti assi di simmetria ha il quadrato? Costruisci il modellino;
— classifica i parallelogrammi usando come criterio la simmetria.

Scheda 10

Le forme come modelli

1. Fai il disegno schematico di una casa e, con le spalle voltate al tuo compagno, descrivilo a parole in modo che egli lo possa riprodurre fedelmente.

2. Con nettapipe e cannucce da bibita costruisci una casa o una scala o uno steccato.

3. Disegna la pianta del tuo appartamento e chiedi di descriverlo, a qualcuno che non lo conosca, osservando e valutando la pianta da te realizzata.

Scheda 11

Le figure equivalenti nel piano

1. Ritaglia (cfr. fig. 1) le 2 figure in modo da formare, con i pezzi ottenuti, un disco (la soluzione è visibile nella figura 2).

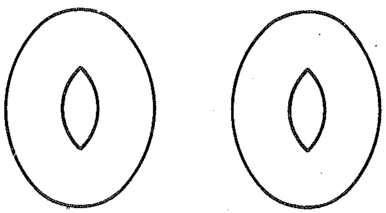


Figura 1

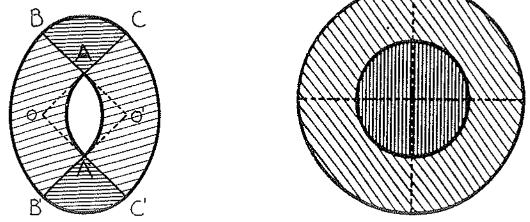


Figura 2

2. Disegna e ritaglia su un foglio a quadretti i pentamini (polimini di ordine 5). Per sapere quanti ne puoi trovare consulta la seguente tabella:

ordine	1	2	3	4	5	6	7
numero	1	1	2	5	12	35	108

Quale pentamino da te trovato ha perimetro maggiore? Quale perimetro minore?

3. Puoi ripetere l'esercizio 2 su un foglio isometrico.

4. Disegna tutti i rettangoli di perimetro 16 cm, in cui le misure in cm dei lati siano numeri interi. Quali di essi ha area massima?

5. Disegna tutti i triangoli di perimetro 15 cm. Quale di essi ha area massima? (Ci si può aiutare con una cordicella).

6. Un solido è regolare se ha per facce poligoni regolari congruenti che convergono sempre in ugual numero in un vertice. Essi sono:

Nome	*Facce*	*Numero facce convergenti in ogni vertice*
tetraedo	triangoli equilateri	3
ottaedro	triangoli equilateri	4
icosaedro	triangoli equilateri	5
esaedro	quadrati	3
dodecaedro	pentagoni	3

Perché i solidi platonici sono soltanto questi 5?

APPENDICE

DAI PROGRAMMI DIDATTICI PER LA SCUOLA PRIMARIA

Decreto del Presidente della Repubblica 12 febbraio 1985, n. 104

MATEMATICA

Matematica e formazione del pensiero

L'educazione matematica contribuisce alla formazione del pensiero nei suoi vari aspetti: di intuizione, di immaginazione, di progettazione, di ipotesi e deduzione, di controllo e quindi di verifica o smentita. Essa tende a sviluppare, in modo specifico, concetti, metodi e atteggiamenti utili a produrre le capacità di ordinare, quantificare e misurare fatti e fenomeni della realtà e a formare le abilità necessarie per interpretarla criticamente e per intervenire consapevolmente su di essa.

L'insegnamento della matematica nella scuola elementare è stato per lungo tempo condizionato dalla necessità di fornire precocemente al fanciullo strumenti indispensabili per le attività pratiche. Con il dilatarsi della istruzione si è avuta la possibilità di puntare più decisamente verso obiettivi di carattere formativo.

In questa situazione, che offriva una più ampia libertà progettuale, l'insegnamento della matematica, in quasi tutti i paesi del mondo, si è orientato verso l'acquisizione diretta di concetti e strutture matematiche e ha promosso anche in Italia una intensa attività di sperimentazione.

La vasta esperienza compiuta ha però dimostrato che non è possibile giungere all'astrazione matematica senza percorrere un lungo itinerario che collega l'osservazione della realtà, l'attività di matematizzazione, la risoluzione dei problemi, la conquista dei primi livelli di formalizzazione. La più recente ricerca didattica, attraverso un'attenta analisi dei processi cognitivi in cui si articola l'apprendimento della matematica, ne ha rilevato la grande complessità, la gradualità di crescita e linee di sviluppo non univoche.

In questo contesto si è constatato che anche gli algoritmi (cioè, i procedimenti ordinati) di calcolo e lo studio delle figure geometriche hanno una valenza formativa ben al di là delle utilizzazioni pratiche che un tempo giustificavano il loro inserimento nei programmi.

Obiettivi e contenuti

Per chiarezza espositiva vengono distinti di seguito alcuni temi matematici articolati per obiettivi. L'insegnante si sforzerà di svilupparli in modo coordinato, approfittando di tutte le occasioni sia per richiamare questioni di tipo matematico, sia per collegarli con argomenti di altre discipline. Gli obiettivi elencati hanno caratteristiche e funzioni diverse. Alcuni tengono conto della acquisizione di abilità e di conoscenze strettamente concatenate, e vanno tradotti in precise progressioni e in indicatori particolari che ne segnalino una acquisizione stabile oppure incertezze o carenze. Si tratta, principalmente, di obiettivi riguardanti i numeri naturali e decimali, le abilità di calcolo e alcuni contenuti della geometria. Altri obiettivi riguardano fatti, concetti, principi e procedimenti meno strettamente concatenati, da introdurre ad un primo stadio di conoscenza e che verranno sviluppati e approfonditi ad un successivo livello scolastico. Fra questi, si possono ricordare quelli relativi alla logica, alla probabilità, alla statistica e all'informatica. La valutazione del conseguimento degli obiettivi proposti deve pertanto tener conto di tali diversità.

a) *I problemi*

Il pensiero matematico è caratterizzato dalla attività di risoluzione di problemi e ciò è in sintonia con la propensione del fanciullo a porre domande e a cercare risposte. Di conseguenza le nozioni matematiche di base vanno fondate e costruite partendo da situazioni problematiche concrete, che scaturiscono da esperienze reali del fanciullo e che offrano anche l'opportunità di accertare quali apprendimenti matematici egli ha in precedenza realizzato, quali strumenti e quali strategie risolutive utilizza e quali sono le difficoltà che incontra.

Occorre evitare, peraltro, di procedere in modo episodico e non ordinato e tendere invece ad una progressiva organizzazione delle conoscenze.

Obiettivi

— Tradurre problemi elementari espressi con parole in rappresentazioni matematiche, scegliendo le operazioni adatte; quindi trovare le soluzioni e interpretare correttamente i risultati; inversamente, attribuire un significato a rappresentazioni matematiche date;
— individuare situazioni problematiche in ambiti di esperienza e di studio e formularne e giustificarne ipotesi di risoluzione con l'uso di appropriati strumenti matematici, sia aritmetici sia di altro tipo;
— risolvere problemi aventi procedimento e soluzione unici e problemi che offrono possibilità di risposte diverse, ma ugualmente accettabili;
— individuare la carenza di dati essenziali per la risoluzione di problemi ed eventualmente integrarli; riconoscere in un problema la presenza di dati sovrabbondanti, oppure contraddittori con conseguente impossibilità di risolverlo.

b) *Aritmetica*

Lo sviluppo del concetto di numero naturale va stimolato valorizzando le precedenti esperienze degli alunni nel contare e nel riconoscere simboli numerici, fatte in contesti di gioco e di vita familiare e sociale. Va tenuto presente che l'idea di numero naturale è complessa e richiede pertanto un approccio che si avvale di diversi punti di vista (ordinalità, cardinalità, misura, ecc.); la sua acquisizione avviene a livelli sempre più elevati di interiorizzazione e di astrazione durante l'intero corso di scuola elementare, e oltre.

La formazione delle abilità di calcolo va fondata su modelli concreti e strettamente collegata a situazioni problematiche. Con ciò non si intende sottovalutare l'importanza della formazione di alcuni automatismi fondamentali (quali le tabelline, ad esempio) da concepire come strumenti necessari per una più rapida ed essenziale organizzazione degli algoritmi di calcolo.

In effetti, la conoscenza di algoritmi, insieme all'elaborazione di diverse procedure e strategie del calcolo mentale, contribuisce anche alla costruzione significativa della successione dgli interi naturali e di altre importanti successioni numeriche (pari, dispari, multipli, ecc.).

Obiettivi del primo e secondo anno

— Contare, sia in senso progressivo che regressivo, collegando correttamente la sequenza numerica verbale con l'attività manipolativa e percettiva;
— confrontare raggruppamenti di oggetti rispetto alla loro quantità e indicare se essi hanno lo stesso numero di elementi, oppure di più o di meno;
— leggere e scrivere i numeri naturali almeno entro il cento, esprimendoli sia in cifre che a parole; confrontarli e ordinarli, anche usando i simboli $=$, $<$, $>$; inoltre disporli sulla linea dei numeri in modo corretto;
— eseguire con precisione e rapidità semplici calcoli mentali di addizioni e sottrazioni;
— raggruppare oggetti a due a due contando per due, raggrupparli a tre a tre contando per tre, e così via.
— con l'aiuto di quantità adeguate di oggetti calcolare, in collegamento reciproco, il doppio/la metà, il triplo/il terzo, il quadruplo/il quarto, ecc.;
— eseguire, almeno entro il cento, addizioni e sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni (con moltiplicatori e divisori di una cifra) anche con l'ausilio di opportune concretizzazioni e rappresentazioni.

Obiettivi del terzo, quarto e quinto anno

— Leggere i numeri, naturali e decimali, espressi sia in cifre sia in parole, traducendoli nelle corrispondenti somme di migliaia, centinaia, decine, unità, decimi, centesimi, ecc.;
— scrivere sia in cifre sia a parole, anche sotto dettatura, i numeri naturali e decimali, comprendendo il valore posizionale delle cifre, il significato e l'uso dello zero e della virgola;
— confrontare e ordinare i numeri naturali e decimali, utilizzando opportunamente la linea dei numeri (ad esempio, mediante sottograduazioni);
— scrivere una successione di numeri naturali partendo da una regola data; viceversa, scoprire una regola che generi una data successione;
— intuire e saper usare la proprietà commutativa e associativa nella addizione e nella moltiplicazione, la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, la proprietà invariantiva nella sottrazione e nella divisione, anche per agevolare i calcoli mentali utilizzando opportune strategie e approssimazioni;
— eseguire per iscritto le quattro operazioni aritmetiche con i numeri naturali e decimali, comprendendo il significato dei procedimenti di calcolo;
— moltiplicare e dividere numeri naturali e decimali per dieci, cento e mille, comprendendo il significato di queste operazioni;
— calcolare, in relazione reciproca, multipli e divisori di numeri naturali, e riconoscere i numeri primi;
— trovare le frazioni che rappresentano parti di adatte figure geometriche, di insiemi di oggetti o di numeri; viceversa, data una frazione trovare in opportune figure geometriche, in insiemi di oggetti o in numeri la parte corrispondente, con particolare attenzione alle suddivisioni decimali;
— confrontare e ordinare le frazioni più semplici, utilizzando opportunamente la linea dei numeri (ad esempio, con graduazioni successive);
— confrontare e ordinare sulla linea dei numeri gli interi relativi, facendo riferimento, se necessario, a esperienze personali (ad esempio, l'uso del termometro);
— rispettare l'ordine di esecuzione di una serie di operazioni (espressione), interpretando il significato della punteggiatura e comprendendo l'ordine stesso; viceversa, costruire una espressione usando l'adeguata punteggiatura per il rispetto dell'ordine di esecuzione.

c) *Geometria e misura*

La geometria va vista inizialmente come graduale acquisizione delle capacità di orientamento, di riconoscimento e di localizzazione di oggetti e di forme e, in generale, di progressiva organizzazione dello spazio, anche attraverso l'introduzione di opportuni sistemi di riferimento.

L'itinerario geometrico elementare, tendendo alla sistemazione delle esperienze spaziali del fanciullo, si svilupperà attraverso la progressiva introduzione di rappresentazioni schematiche degli aspetti della realtà fisica; dallo studio e dalla realizzazione di modelli e disegni si perverrà alla conoscenza delle principali figure geometriche piane e solide e delle loro trasformazioni elementari. Si porrà particolare attenzione ad una corretta acquisizione dei concetti fondamentali di lunghezza, area, volume, angolo, parallelismo, perpendicolarità. Consistente rilievo dovranno avere, altresì, l'introduzione delle grandezze e l'uso dei relativi procedimenti di misura, da far apprendere anch'essi in contesti esperienziali e problematici e in continuo collegamento con l'insegnamento delle scienze.

Obiettivi del primo e secondo anno

— Localizzare oggetti nello spazio, prendendo come riferimento sia se stessi, sia altre persone e oggetti, e usare correttamente i termini: davanti/dietro, sopra/sotto, a destra/a sinistra, vicino/lontano, dentro/fuori;
— effettuare spostamenti lungo percorsi che siano assegnati mediante istruzioni orali o scritte e descrivere — verbalmente o per iscritto — percorsi eseguiti da altri, anche ricorrendo a rappresentazioni grafiche appropriate;
— riconoscere negli oggetti dell'ambiente e denominare correttamente i più semplici tipi di figure geometriche, piane e solide;
— individuare simmetrie in oggetti e figure date; realizzare e rappresentare graficamente simmetrie mediante piegature, ritagli, disegni, ecc.;
— confrontare e misurare lunghezze, estensioni, capacità, durate temporali, usando opportune unità, arbitrarie o convenzionali, e loro successive suddivisioni.

Obiettivi del terzo, quarto e quinto anno

— Riconoscere in contesti diversi, denominare, disegnare e costruire le principali figure geometriche piane; costruire, con tecniche e materiali diversi, alcune semplici figure geometriche solide e descriverne alcune caratteristiche, come, nel caso di poliedri, numero dei vertici, degli spigoli, delle facce;
— riconoscere l'equiestensione di semplici figure piane mediante scomposizioni e ricomposizioni;
— misurare e calcolare il perimetro e l'area delle principali figure piane, avendo consapevolezza della diversità concettuale esistente tra le due nozioni;
— trovare il volume di oggetti anche irregolari con strategie e unità di misura diverse, avendo consapevolezza della diversità concettuale esistente tra la nozione di volume e quella di area della superficie di una figura solida;

— individuare, in situazioni concrete, posizioni e spostamenti nel piano (punti, direzioni, distanze, angoli come rotazioni); rappresentare tali situazioni anche con l'uso di reticolati a coordinate intere positive, di mappe, di cartine, ecc.;
— usare correttamente espressioni come: retta verticale, orizzontale, rette parallele, incidenti, perpendicolari; disegnare, con riga, squadra e compasso, rette parallele e perpendicolari, angoli e poligoni;
— riconoscere eventuali simmetrie presenti in una figura piana e classificare triangoli e quadrangoli rispetto alle simmetrie stesse;
— realizzare, anche con l'uso di materiale concreto e con disegni, la corrispondente di una figura geometrica piana sottoposta ad una traslazione, ad una simmetria assiale, ad una rotazione, ad un ingrandimento o impicciolimento in scala;
— conoscere le principali unità internazionali e pratiche per la misura di lunghezze, aree, volumi/capacità, pesi; saperle usare correttamente per effettuare stime e misure;
— scegliere, costruire e utilizzare strumenti adeguati per effettuare le misurazioni;
— passare da una misura espressa in una data unità ad un'altra ad essa equivalente, limitatamente ai casi più comuni e con aderenza al linguaggio corrente anche in riferimento al sistema monetario;
— effettuare misure: di ampiezze angolari (in gradi), di durate (in ore, minuti primi e secondi); operare con tali unità in casi problematici reali.

d) *Logica*

L'educazione logica, più che oggetto di un insegnamento esplicito e formalizzato, deve essere argomento di riflessione e di cura continua dell'insegnante, a cui spetta il compito di favorire e stimolare lo sviluppo cognitivo del fanciullo, scoprendo tempestivamente eventuali difficoltà e carenze.

Particolare cura sarà rivolta alla conquista della precisione e della completezza del linguaggio, tenendo conto che, soprattutto nei primi anni di scuola, il linguaggio naturale ha ricchezza espressiva e potenzialità logica adeguate alle necessità di apprendimento.

L'insegnante proporrà fin dall'inizio, sul piano dell'esperienza e della manipolazione concreta, attività ricche di potenzialità logica, quali: classificazioni mediante attributi, inclusioni, seriazioni, ecc. Con gradualità potrà introdurre qualche rappresentazione logico-insiemistica (si potranno usare i diagrammi di Eulero-Venn, i grafi, ecc.) che sarà impiegata per l'aritmetica, la geometria, le scienze, per la lingua, ecc. Tuttavia terrà presente che la simbolizzazione formale di operazioni logico-insiemistiche non è necessaria, in via preliminare, per l'introduzione degli interi naturali e delle operazioni aritmetiche. Terrà, inoltre, presente che le più elementari questioni di tipo combinatorio forniscono un campo di problemi di forte valenza logica.

Obiettivi del primo e secondo anno

— Classificare oggetti, figure, numeri... in base ad un dato attributo e, viceversa, indicare un attributo che spieghi la classificazione data;
— in contesti problematici concreti e particolarmente semplici, individuare tutti i possibili casi di combinazioni di oggetti e di attributi;
— scoprire e verbalizzare regolarità e ritmi in successioni date di oggetti, di immagini, di suoni e, viceversa, seguire regole — proposte oralmente o per iscritto — per costruire tali successioni;
— rappresentare con schematizzazioni elementari (ad esempio, con frecce) successioni spazio-temporali, relazioni d'ordine, corrispondenze, riferite a situazioni concrete.

Obiettivi del terzo, quarto e quinto anno

— Classificare oggetti secondo due o più attributi e realizzare adeguatamente rappresentazioni delle stesse classificazioni mediante diagrammi di Venn, di Carroll, ad albero, con tabelle, con schede a bordo perforato...;
— usare correttamente il linguaggio degli insiemi nelle operazioni di unione, di intersezione, di complemento, anche in relazione alla utilizzazione dei connettivi logici e con applicazioni alle classificazioni aritmetiche, geometriche, naturalistiche, grammaticali, ecc.

e) *Probabilità, statistica, informatica*

Importanza educativa notevole va riconosciuta anche a concetti, principi e capacità connessi con la rappresentazione statistica di fatti, fenomeni e processi e con la elaborazione di giudizi e di previsioni in condizioni di incertezza.

L'introduzione dei primi elementi di probabilità, che può trovare posto alla fine del corso elementare, ha lo scopo di preparare nel fanciullo un terreno intuitivo su cui si possa, in una fase successiva, fondare l'analisi razionale delle situazioni di incertezza.

La classica definizione di probabilità — come rapporto fra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili in situazioni aleatorie simmetriche — non può essere assunta come punto di partenza, ma è piuttosto il punto di arrivo di una ben graduata attività.

Nello sviluppo di questo itinerario può realizzarsi la costruzione e l'analisi di procedimenti e di algoritmi — numerici e non numerici — anche con l'uso iniziale, ma coerente e produttivo, di opportuni strumenti di calcolo e di elaborazione delle informazioni.

Obiettivi del primo e del secondo anno

— In situazioni problematiche tratte dalla vita reale e dal gioco, usare in modo significativo e coerente le espressioni: forse, è possibile, è sicuro, non so, è impossibile, ecc.

Obiettivi del terzo, quarto e quinto anno

— Compiere osservazioni e rilevamenti statistici semplici; tracciare diagrammi a barre, istogrammi, aerogrammi...; calcolare medie aritmetiche e percentuali, usando, se ritenuto opportuno, calcolatrici tascabili; viceversa, interpretare rappresentazioni e calcoli fatti da altri;
— confrontare in situazioni di gioco le probabilità dei vari eventi mediante l'uso di rappresentazioni opportune;
— rappresentare, elencare e numerare tutti i possibili casi in semplici situazioni combinatorie; dedurne alcune elementari valutazioni di probabilità;
— tracciare e interpretare diagrammi di flusso per la rappresentazione di convenienti processi.

Indicazioni didattiche

1. All'inizio della prima elementare è opportuno che l'insegnante svolga una attenta ricognizione dello stato di preparazione dei singoli alunni in relazione alle esigenze del processo di apprendimento della matematica. A tal fine sembra utile un'osservazione sistematica dei comportamenti più significativi quali si manifestano nel contesto delle attività didattiche e dei giochi. Importanti settori di osservazione sono le capacità di: cogliere relazioni e porre in relazione oggetti fra loro, contare per contare (sequenza numerica verbale), contare oggetti (corrispondenza fra passi successivi della sequenza numerica verbale e oggetti), orientarsi nello spazio (sopra, sotto, avanti, dietro...), orientarsi nel tempo (prima, dopo).

La programmazione didattica verrà sviluppata tenendo conto delle informazioni ottenute mediante questa prima ricognizione e sarà diretta, in primo luogo, a costituire una comune base di esperienze su cui fondare la riflessione e la concettualizzazione matematica e un più agevole raccordo con la scuola materna e l'extra-scuola. Ciò potrà essere raggiunto anche attraverso attività e giochi scelti fra quelli tradizionalmente presenti negli ambienti di vita del fanciullo.

Nel conseguimento dei diversi obiettivi è importante procedere in modo costruttivo e significativo, fornendo agli alunni una adeguata base manipolatoria e rappresentativa. Ciascun alunno va messo in condizione di utilizzare, inizialmente, materiali diversi, comuni o strutturati, che forniscano adeguati modelli dei concetti matematici implicati nelle varie procedure operative. Tuttavia è importante che egli si distacchi, ad un certo punto, dalla manipolazione dei materiali stessi per arrivare ad utilizzare soltanto le relative rappresentazioni mentali nella esecuzione e nella interpretazione dei compiti a lui assegnati.

Il passaggio dall'esperienza alla rappresentazione e quindi alla formalizzazione può avvenire muovendo dalle situazioni più varie; fra di esse un ruolo importante hanno le più naturali e spontanee: quelle di gioco. Ogni attività di gioco e di lavoro, ben impostata e condotta, favorisce una attività intellettuale controllata ed educa al confronto di idee, comportamenti, soluzioni alternative, in un clima positivo di socializzazione.

Fra i giochi si possono comprendere sia quelli spontanei o appresi dal fanciullo nel suo ambiente culturale, sia quelli più specificamente indirizzati al conseguimento di particolari abilità matematiche.

2. Cura particolare va posta sia nella acquisizione del complesso concetto di numero naturale, sia nella formazione della capacità di rappresentarlo nel sistema di scritture decimale, con riferimento al valore posizionale delle cifre e al significato e all'uso dello zero. A tale scopo può risultare vantaggiosa l'introduzione di sistemi di numerazione diversi da quello decimale per la notazione multibase di tali numeri. Va, inoltre, tenuto presente che l'insieme dei numeri naturali ha la caratteristica fondamentale di essere ordinato e, pertanto, è essenziale che il fanciullo acquisisca la capacità di confrontare e ordinare gli stessi numeri, utilizzando anche la cosiddetta linea numerica o retta graduata.

Entro il secondo anno gli alunni dovranno pervenire a dominare operativamente i numeri naturali almeno entro il cento. In terza classe sarà opportuno condurli a operare, come traguardo minimo per tutti, con numeri entro il mille proponendo addizioni e sottrazioni con non più di due cambi (riporti o prestiti), moltiplicazioni con fattori di non più di due cifre e divisioni con divisore di una cifra. In quarta classe tali vincoli potranno cadere, anche se è opportuno non oltrepassare il milione nel calcolo scritto.

L'introduzione dei numeri con virgola va realizzata a partire dal terzo anno e le relative operazioni vanno introdotte, con gradualità, negli ultimi due anni. In quarta classe ci si può limitare alle addizioni e alle sottrazioni, con specifica attenzione al valore frazionario delle cifre secondo la posizione occupata a destra della virgola, e quindi all'incolonnamento. In quinta classe le moltiplicazioni e le divisioni con numeri decimali non dovranno avere, rispettivamente, fattori e divisori con più di due cifre dopo la virgola.

I suggerimenti di non oltrepassare determinati limiti numerici vanno intesi esclusivamente in funzione della necessità di centrare l'attenzione degli alunni sui fondamentali concetti di notazione posizionale e sulle relative eventuali conseguenze di cambio; questi dovranno essere totalmente dominati in contesti semplici prima di poterli ampliare, per analogia e con gradualità, in contesti man mano più complessi dove si utilizzano numeri di molte cifre.

L'acquisizione significativa delle tecniche ordinarie di calcolo delle quattro operazioni scritte andrà opportunamente consolidata mettendo gli alunni in grado di saper ottenere, nei casi possibili, uno stesso risultato numerico elaborando, di volta in volta, schemi di calcolo (algoritmi) differenti, sia mediante scomposizioni diverse dei numeri, sia con l'uso pertinente delle proprietà delle operazioni. Tutto ciò, accompagnato dalla assunzione dei necessari automatismi, influirà positivamente sulla formazione delle importanti capacità di eseguire calcoli mentali con precisione e rapidità, tenendo presente che tali capacità non solo sono utili a prevedere e a verificare lo sviluppo, anche in approssimazione, di operazioni complesse eseguite per iscritto, ma servono, inoltre, a controllare l'esito delle operazioni stesse, allorché in momenti successivi verranno realizzate mediante calcolatrici tascabili.

Le attività di manipolazione di materiali idonei, le operazioni di misura di grandezze fisiche diverse, le analisi di dati economici e demografici, ecc. possono offrire occasioni di lavoro con i numeri sia in base dieci che in altre basi o, nel terzo, quarto e quinto anno, un opportuno punto di partenza per l'avvio della comprensione delle potenze e della loro scrittura.

Particolarmente utile può risultare, in proposito, la scrittura dei numeri cento, mille, diecimila,... mediante potenze del dieci, per giungere alla trascrizione di un numero con più cifre sotto forma di polinomio numerico.

3. L'avvio allo studio della geometria va ricollegato in modo naturale ad una pluralità di sollecitazioni che provengono dalla percezione della realtà fisica. Sarebbe quindi oltremodo riduttivo limitare l'insegnamento di questo settore alla semplice memorizzazione della nomenclatura tradizionale e delle formule per il calcolo dei perimetri, aree, volumi di figure particolari.

Va favorita, invece, un'attività geometrica ricca e variata, prendendo le mosse dalla manipolazione concreta di oggetti e dall'osservazione e descrizione delle loro trasformazioni e posizioni reciproche.

Le nozioni di perimetro, area, volume andranno introdotte — a livello intuitivo — anche per figure irregolari, in modo da svincolare questi concetti dalle formule, le quali vanno viste come semplici strumenti atti a facilitare i calcoli in casi importanti ma particolari.

Il disegno geometrico, inizialmente a mano libera, quindi con riga, squadra e compasso, andrà curato con attenzione, sia per le notevoli abilità operative che esso promuove, sia per favorire l'assimilazione di concetti come «parallelismo» e «perpendicolarità».

Oltre ai sistemi di riferimento di tipo cartesiano, comunemente usati per individuare posizioni su un reticolato a coordinate intere positive (geopiano, carta quadrettata, mappe o carte geografiche), si potranno introdurre informalmente altri sistemi di riferimento più direttamente collegati alla posizione dell'osservatore.

Per il calcolo dei perimetri e delle aree si raccomanda di non insistere troppo sull'apprendimento dei cosiddetti «numeri fissi» (costanti) attraverso la proporzione di nozioni puramente mnemoniche il cui significato, a questo livello di età, risulta difficilmente comprensibile; per quel che riguarda la presentazione del numero π, sarà sufficiente indicare che esso vale approssimativamente 3,14.

4. Un itinerario di lavoro per la misura, che tenga conto delle difficoltà implicate nel processo di misurazione, dovrà comprendere le tappe del confronto diretto, del confronto indiretto, con campioni arbitrari, e del confronto indiretto con le unità di misura convenzionali.

Una effettiva comprensione del significato di «misura» è perseguibile solo attraverso una ricca base sperimentale, senza la quale non è possibile comprendere che «misurare» significa scandire una quantità continua e scoprire le difficoltà che si incontrano e gli errori che si possono commettere in un processo di misurazione.

Una riflessione sulle unità di misura locali del passato e, dove permangono ancora, del presente, così come sulle unità di misura di altri popoli e di altri tempi, potrà servire a consolidare l'idea della convenzionalità del sistema in uso.

Nell'uso di unità di misura convenzionali si raccomanda di uniformarsi alle norme del «Sistema Internazionale di Unità» (riportate nel D.P.R. n. 802 del 12 agosto 1982), che tra l'altro prescrivono di posporre il simbolo («marca») al valore numerico in linea con esso, senza farlo seguire da un punto; si suggerisce anche di evitare esercitazioni con unità di misura scarsamente usate, ad esempio il miriagrammo.

Quanto all'uso delle «marche» nella risoluzione di problemi, essendo inadatto a questo livello di età uno sviluppo sistematico dei calcoli dimensionali, è preferibile che esse non vengano riportate nelle indicazioni delle operazioni. È invece opportuno che accanto alle operazioni stesse si riporti una descrizione del procedimento nella quale si indicherà l'unità di misura di ciascun risultato man mano ottenuto.

È da tenere, inoltre, presente che possono essere misurati sia gli aspetti della realtà fisica direttamente esperibili (lunghezze, tempi, pesi, capacità, temperature, ...), sia aspetti della realtà economica e sociale (produzione, migrazione, variabilità delle nascite, ...). Il «misurare» è quindi da considerare come uno strumento conoscitivo che aumenta le possibilità di comprendere i fatti e i fenomeni, come, viceversa, dallo studio dei fatti e dei fenomeni si può comprendere che la misura non è limitabile ai ristretti campi delle lunghezze, dei pesi o delle aree.

5. Gli elementi di logica e di insiemistica hanno come obiettivo principale la padronanza dei relativi linguaggi e il loro impiego in contesti significativi.

L'insegnante, inoltre, condurrà l'alunno, con esempi concreti, all'impiego corretto di termini come «tutti», «qualcuno», ecc. Ciò, peraltro, non comporterà necessariamente l'impiego della simbologia matematica relativo agli insiemi e alle operazioni insiemistiche e logiche.

Si raccomanda di non introdurre nozioni in modo scorretto, essendo preferibile posticipare la precisazione di un concetto alla rettifica di nozioni già introdotte impropriamente. Ad esempio, è opportuno che il quadrato sia presentato come caso particolare del rettangolo, evitando di far credere che un rettangolo è tale solo se ha, necessariamente, lati disuguali. Così pure una particolare cura dovrà essere posta al segno di «uguaglianza»; quando, ad esempio, si hanno catene di operazioni, anziché il segno di uguaglianza (che in questo contesto indica il compimento di un'operazione, e che spesso viene usato in modo improprio) si impiegheranno altri segni (ad esempio, si potrà ricorrere ai grafi).

6. Le raccolte dei dati, effettuate in contesti diversi e opportunamente organizzate, condurranno alle prime nozioni di statistica descrittiva anche attraverso visualizzazioni immediate.

Quanto alle prime nozioni di probabilità è importante che il fanciullo sia condotto ad accettare senza turbamento situazioni di incertezza. Si può raggiungere molto bene questo scopo mediante il gioco: molti giochi hanno carattere aleatorio o ricorrono alla sorte per l'assegnazione di particolari ruoli. L'abilità del giocatore consiste nel saper scegliere, fra le varie mosse possibili, quella che offre maggiore probabilità di vittoria; si tratta dunque, in primo luogo, di condurre l'alunno a compiere confronti di probabilità. Ciò può essere fatto dapprima in termini più vaghi, e poi in situazioni ben schematizzate.

Anche l'informatica richiede un'attenta considerazione: da un lato, essa mette in evidenza l'idea di algoritmo, già presente nella aritmetica ma suscettibile di un impiego assai più vasto; dall'altro, essa presenta il calcolatore come strumento di esplorazione del mondo dei numeri, di elaborazione e di interazione. Si terrà presente che esso è diventato uno strumento importante nella società contemporanea e non può, quindi, essere ignorato; ma, nello stesso tempo, sarà opportuno evitare infatuazioni, considerando che nessuno strumento, per quanto tecnologicamente sofisticato, può avere da solo effetti risolutivi.

In definitiva, l'introduzione al pensiero e alla attività matematica deve rivolgersi in primo luogo a costruire, soprattutto là dove essa si manifesta carente, una larga base esperienziale di fatti, fenomeni, situazioni e processi, sulla quale poi sviluppare le conoscenze intuitive, i procedimenti e gli algoritmi di calcolo e le più elementari formalizzazioni del pensiero matematico.

Si favorirà così la formazione di un atteggiamento positivo verso la matematica, intesa sia come valido strumento di conoscenza e di interpretazione critica della realtà, sia come affascinante attività del pensiero umano.

BIBLIOGRAFIA

Riferimento generale: C. Bernardi, L. Cannizzaro, M. Lanciano, P. Mentrasti (1990a), a cura di, *La matematica nella scuola elementare. Il numero e le abilità numeriche. Problemi*, Firenze, La Nuova Italia; C. Bernardi, L. Cannizzaro, M. Lanciano, P. Mentrasti (1990b), a cura di, *La matematica nella scuola elementare. Logica. Informatica. Probabilità e statistica*, Firenze, La Nuova Italia.

AA.VV. (1971), *Il mondo delle misure*, Bologna, Zanichelli.

Arnold A. (1972), *I giochi dei bambini*, Milano, Mondadori.

Castelnuovo E., Barra M. (1983), *Matematica nella realtà*, Torino, Boringhieri.

Claparède E. (1972), *La genesi dell'ipotesi*, Firenze, Giunti-Barbera.

Dapueto C. (1987), «Il primo apprendimento geometrico», in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, rivista del Centro Ugo Morin, vol. 10, n. 11 (articolo di riflessione teorica sulla geometria nella scuola elementare).

de Ajuriaguerra J. (1971), *L'écriture de l'enfant*, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

Dienes Z.P., Golding E.W. (1966), *Esplorazioni dello spazio e pratica della misura*, Firenze, Organizzazioni Speciali.

Id. (1969), *La geometria attraverso le trasformazioni*, Firenze, Giunti-Marzocco, 3 voll.

Gardner M. (1985), *Enigmi e giochi matematici*, Firenze, Sansoni.

Gigli A. (1975), *Scrutiamo l'universo*, Roma, Editori Riuniti.

Karplus R. (1970), *Relatività. Unità di insegnamento scientifico per le classi elementari*, Movimento di Cooperazione Educativa.

Lapierre A., Aucouturier B. (1984), *I contrasti e la scoperta delle nozioni fondamentali*, Milano, Sperling & Kupfer.

Olivieri G. (1984), *Lavorando con gli specchi: introduzione alla geometria delle trasformazioni*, Firenze, La Nuova Italia.

Palma M., Pezzella M. (1987), *Il lavoro matematico*, Milano, Mondadori.
Pellerey M. (1986), *Una matematica di base per il cittadino di domani*, in Laeng M. (a cura di), *I nuovi programmi della scuola elementare*, Teramo, Lisciani & Giunti.
Petter G. (1978), *Lo sviluppo mentale nelle ricerche di Jean Piaget*, Firenze, Giunti-Barbera.
Piaget J., Inhelder B., Szemiska A. (1976a), *La geometria spontanea del bambino*, Firenze, Giunti-Barbera.
Id. (1976b), *La rappresentazione dello spazio nel bambino*, Firenze, Giunti-Barbera.
Progetto Nuffield per la matematica (1970a), *Dalle esperienze alle relazioni*, Bologna, Zanichelli.
Id. (1970b), *Dai grafici all'algebra*, Bologna, Zanichelli.
Id. (1971), *Forme nell'ambiente*, Bologna, Zanichelli.
Id. (1972), *Figure in movimento*, Bologna, Zanichelli.
Read R.C. (1970), *Il tangram rompicapo cinese*, Torino, Poligramma.
Sacchetti I. (1985), *Il bambino e il gioco nella tradizione popolare*, Roma, Armando.
Servais W. (1982), *Concreto. Astratto*, in AA.VV. *Il materiale per l'insegnamento della matematica*, Firenze, La Nuova Italia.
Vespi A. (1966), *Misurare è facile?*, Torino, Loescher.
Vicentini Missoni M., Grazzini Hoffmann C., Raddi E. (1983), *La misura*, Firenze, La Nuova Italia.
Winnicott D.W. (1974), *Gioco e realtà*, Roma, Armando.