**Istituzioni di matematica, I**

Esercizi di allenamento per il secondo esonero

1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i quattro punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}; \qquad P_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare equazioni cartesiane per il piano $\pi$ passante per i punti $P_1$, $P_2$ e $P_3$;

   (b) Determinare equazioni parametriche per la retta $r$ perpendicolare al piano $\pi$ e passante per il punto $P_4$;

   (c) Determinare equazioni cartesiane per la retta $r$ del punto precedente.

2. Si consideri, al variare del parametro $k$, il sistema

$$\begin{cases} (-k+1)x - y + (-2k+1)z = -k \\ kx + (k+3)y + (k-2)z = k+2 \\ kx + y + 2kz = k+1 \end{cases}$$

   (a) stabilire per quali valori di $k$ il sistema abbia soluzione, e da quanti parametri dipendano le soluzioni nei vari casi;

   (b) risolvere il sistema per $k = 0$;

   (c) risolvere il sistema per $k = -1$.

3. In $\mathbb{R}^3$ si considerino al variare del parametro $k$ i tre vettori

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 2k \end{pmatrix}; \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 5 \end{pmatrix}; \qquad \vec{z} = \begin{pmatrix} k+2 \\ k-2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   (a) determinare i valori del parametro $k$ per i quali i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ siano perpendicolari;

   (b) determinare i valori del parametro $k$ per i quali i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ siano paralleli;

   (c) determinare i valori del parametro $k$ per i quali il parallelepipedo di lati $\vec{v}, \vec{w}$ e $\vec{z}$ abbia volume uguale a 1152.

4. Si consideri, al variare del parametro $k$, il seguente sistema di due equazioni nelle tre variabili $x, y, z$:

$$\begin{cases} (k^2+2)x + 3y + 3z = 2k + 7 \\ \\ (k^2+1)x + 2y + 2z = k + 5 \end{cases}$$

(a) stabilire per quali valori di $k$ il sistema abbia soluzione, e (quando le soluzioni esistono) dire da quanti parametri dipendano le soluzioni nei vari casi;

(b) risolvere il sistema per $k = 0$;

(c) risolvere il sistema per $k = 1$;

5. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i due vettori

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calcolare:

(a) Le norme $\|\vec{v}\|$ e $\|\vec{w}\|$;

(b) il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$;

(c) il prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{w}$;

(d) l'area del parallelogramma individuato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

6. Sia $A$, $B$ e $C$ le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Quali di queste matrici possono essere moltiplicate tra loro? se possibile moltiplicarle eseguire la moltiplicazione;

(b) Stabilire se la matrice $A$ sia invertibile. Se s calcolare la matrice inversa $A^{-1}$;

(c) nel caso la matrice $A$ sia invertibile calcolare i prodotti $B\,A^{-1}$ e $A^{-1}\,C$.

7. Calcolare il determinante della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 15719 & 13410 & 17743 \\ 15718 & 13411 & 17742 \\ 15718 & 13410 & 17742 \end{pmatrix}$$