

Esercizi di algebra lineare (1 ottobre 2018)

Esercizio 1. Costruire un'applicazione iniettiva $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(u+v) = f(u) + f(v)$ per ogni $u, v \in \mathbb{Q}^2$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale e siano $u, v, x, y \in V$. Dimostrare che, se $x + y = 2u$ e $x - y = 2v$, allora $x = u + v$ e $y = u - v$.

Esercizio 3. Trovare un esempio di due sottospazi vettoriali U_1, U_2 di uno spazio vettoriale V tali che la loro unione $U_1 \cup U_2$ non sia un sottospazio vettoriale di V .

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ e sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Per ciascuna delle seguenti 5 operazioni di "somma" \oplus e "prodotto per scalare" \star , determinare quali dei 7 assiomi di spazio vettoriale sono verificati e quali non lo sono:

1. $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, $t \star (a, b) = (ta, b)$;
2. $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b - d)$, $t \star (a, b) = (ta, tb)$;
3. $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, $t \star (a, b) = (|t|a, |t|b)$;
4. $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, $t \star (a, b) = (ta, 0)$;
5. $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, $t \star (a, b) = (2ta, 2tb)$.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{K}[x]$, dire quali tra i seguenti sottoinsiemi siano sottospazi vettoriali:

1. $U = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid p(0) = 0\}$,
2. $U = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid p(0) = 1\}$,
3. $U = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid p(1) = 0\}$,
4. $U = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid p(0) = p(1) = 0\}$,
5. $U = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid p(0)p(1) = 0\}$.

Esercizio 6. Siano U, W sottospazi dello spazio vettoriale V . Mostrare che le seguenti quattro condizioni sono equivalenti:

1. $U \subset W$
2. $U \cap W = U$
3. $U + W = W$
4. $W \cap (S + U) = (W \cap S) + U$, per ogni sottospazio vettoriale S di V .