

Esercizi di algebra lineare (26 ottobre 2018)

Esercizio 1. Siano V un \mathbb{K} -spazio vettoriale con base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ e W un \mathbb{K} -spazio vettoriale con base $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$, e sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare.

Chiamiamo $A = f_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice associata ad f rispetto alle basi \mathcal{B} in partenza e \mathcal{C} in arrivo. Dire se le seguenti affermazioni sono vere (fornendo, in tal caso, una dimostrazione) oppure false (fornendo, in tal caso, un controesempio).

- (a) f è invertibile se e solo se esistono una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $NA = \text{Id}_n$ ed una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $AP = \text{Id}_m$.
- (b) f è invertibile se e solo se esiste una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $NA = \text{Id}_n$.
- (c) f è invertibile se e solo se esiste una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $AP = \text{Id}_m$.
- (d) f è iniettiva se e solo se esiste una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $NA = \text{Id}_n$.
- (e) f è suriettiva se e solo se esiste una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $NA = \text{Id}_n$.
- (f) f è iniettiva se e solo se esiste una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $AP = \text{Id}_m$.
- (g) f è suriettiva se e solo se esiste una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tale che $AP = \text{Id}_m$.
- (h) f è invertibile se e solo se $m = n$ ed esiste una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ tale che $AN = NA = \text{Id}_n$.
- (i) f è invertibile se e solo se $m = n$ ed esiste una matrice $N \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ tale che $NA = \text{Id}_n$.
- (j) f è invertibile se e solo se $m = n$ ed esiste una matrice $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ tale che $AP = \text{Id}_n$.

Esercizio 2. Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita.

Dimostrare che $\{0\} \neq \ker f \neq V \iff$ esiste un'applicazione lineare $g : W \rightarrow V$ tale che $f \circ g = 0$ e $g \circ f \neq 0$.

Esercizio 3. Siano $f, g : V \rightarrow W$ due applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita.

- (a) Dimostrare che $\text{Im}(f + g) \subseteq \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.
- (b) Dedurre da (a) la disuguaglianza $\text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.
- (c) Trovare un esempio in cui $\text{rg}(f + g) = 2$ e $\text{rg}(f) = \text{rg}(g) = 1$.

Esercizio 4. Date due applicazioni lineari $f : U \rightarrow V$ e $g : V \rightarrow W$ tra spazi vettoriali di dimensione finita, dimostrare che

$$\text{rg}(g \circ f) \geq \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim V.$$

Esercizio 5. Sia A una matrice $n \times n$ che commuta con tutte le matrici diagonali $n \times n$. Dimostrare che A è diagonale.

Definizione. La collezione degli elementi $(M_1^1, M_2^2, \dots, M_n^n)$ di una matrice M quadrata $n \times n$ si dice *diagonale principale* di M . Una matrice $D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ si dice **diagonale** se è nulla al di fuori della sua diagonale principale, ossia se $D_j^i = 0$ per ogni $i \neq j$. Ad esempio la matrice identità Id_n e la matrice nulla $n \times n$ sono matrici diagonali. Gli elementi sulla diagonale non devono necessariamente essere tutti uguali. Ad esempio $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ è una matrice diagonale 2×2 a coefficienti in \mathbb{Q} .

Definizione. Siano $f, g : V \rightarrow V$ applicazioni lineari. Diciamo che f, g **commutano** se $f \circ g = g \circ f$. Se $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ sono due matrici quadrate, diciamo che A, B **commutano** se $AB = BA$.