ALGEBRA 1
a.a. 2017/18

Foglio di Esercizi n.1

1. Quante sono le relazioni definibili su un insieme con tre elementi? E le relazioni di equivalenza?

2. Per ciascuna delle seguenti relazioni definite su un insieme, stabilire se si tratta di una relazione di equivalenza; in caso affermativo descrivere le classi di equivalenza corrispondenti.
   - Su $\mathbb{R}$. Se $a, b \in \mathbb{R}$, $a \approx b$ se e solo se $\cos a = \cos b$.
   - Su $\mathbb{Z}$. Se $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \sim b$ se e solo se $b - a$ è un multiplo di 7.
   - Su $\mathbb{Z}$. Se $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \sim b$ se e solo se $b + a$ è un multiplo di 7.
   - Su $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Se $a, b \in \mathbb{Q}^*$, $a \sim b$ se e solo se a/b è una potenza di 2 ovvero se e solo se esiste $m \in \mathbb{Z}$ tale che $a/b = 2^m$.

3. Data l'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = (\sin x, \cos x)$, trovare la relazione di equivalenza $\sim_f$ su $\mathbb{R}$ associata all'applicazione f e studiare l'insieme quoziente.

4. Definiamo in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la relazione
$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow 2(x_1 - x_2) = 3(y_1 - y_2)$$
Dimostrare che è una relazione d'equivalenza e studiare l'insieme quoziente.

5. Definiamo in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la relazione
$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow 4(x_1 - x_2) = 6(y_1 - y_2)$$
Dimostrare che è una relazione d'equivalenza e studiare l'insieme quoziente.

6. Siano a e b in $\mathbb{Z}$, calcolare $\mathrm{MCD}(a, b)$ e scrivere un'identità di Bèzout nei seguenti casi:
$$a = 3256; b = -124; \qquad a = 21344; b = 5484; \qquad a = 6822; b = 861.$$

7. Stabilire se l'equazione diofantea
$$150x - 210y = -18$$
ammette soluzioni. In caso affermativo, trovare tutte le soluzioni.

8. Data la successione di Fibonacci:
$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 2, \quad F_3 = 3, \quad F_4 = 5, \quad \ldots, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$
Trovare con l'algoritmo euclideo $\mathrm{MCD}(F_{n+1}, F_n)$