Esercizi dell'undicesima settimana

1. Dimostrare che $\mathbb{Z}[i]/(2+i)$ è un campo isomorfo a $\mathbb{Z}/(5)$.

2. Sia $A = \mathbb{R}[x]/I$, dove

$$I = (2x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2,\ x^8 - x^7 + x^6 - x^5)$$

   a) Elencare tutti gli ideali dell'anello A con le relative relazioni di inclusione.

   b) Per ogni ideale massimale M di A, descrivere l'anello quoziente A/M.

   c) Stabilire se la classe di $x+1$ in A sia invertibile e, in caso affermativo, trovare l'inverso.

3. Per ciascuno dei seguenti numeri complessi a, trovare il polinomio minimo di a su $\mathbb{Q}$, determinare $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ e dare esplicitamente una base per $\mathbb{Q}(a)$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.

$$2/3, \quad \sqrt{5}+2, \quad \sqrt{2}+\sqrt{3}, \quad 1/2 + i\sqrt{3}/2$$

4. Trovare il polinomio minimo di $\sqrt{2}+i$ su $\mathbb{C}$, su $\mathbb{R}$, su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, su $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$, e su $\mathbb{Q}$.

5. Verificare che $\sqrt{5+\sqrt{3}}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$, dare una base per $\mathbb{Q}(\sqrt{5+\sqrt{3}})$, come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e trovare l'inverso di

$$1 - \sqrt{5+\sqrt{3}}$$

   in $\mathbb{Q}(\sqrt{5+\sqrt{3}})$.

6. Trovare il campo di spezzamento di E di $x^4 - 5x^2 + 6$ su $\mathbb{Q}$ e determinare $[E : \mathbb{Q}]$.

7. Trovare il campo di spezzamento di E di $x^6 - 1$ su $\mathbb{Q}$ e determinare $[E : \mathbb{Q}]$.

8. Trovare i campi di spezzamento E_1, E_2 di

$$f(x) = (x^{12} - 1)(x^2 - 6x - 1)$$

   su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ rispettivamente.

   Determinare $[E_1 : \mathbb{Q}]$ (rispettivamente $[E_2 : \mathbb{Q}(\sqrt{3})]$) e scrivere una base di E_1 (rispettivamente E_2) come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ (rispettivamente su $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$).

9. Siano $F \subseteq K$ campi ed $\alpha, \beta \in K$ elementi algebrici di grado 3 su F. Stabilire quali sono i valori possibili per $[F(\alpha, \beta) : F]$, dando un esempio per ognuno di essi.

10. Dimostrare che se α è un elemento algebrico di grado dispari su un campo F, allora $F(\alpha) = F(\alpha^2)$

11. Stabilire se $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sono campi isomorfi.

12. Stabilire se gli anelli

$$\mathbb{F}_3[x]/(x^2+2x+2) \qquad \text{e} \qquad \mathbb{F}_3[x]/(x^2+1)$$

sono isomorfi e, in caso affermativo, esplicitare un isomorfismo.

13. Stabilire le relazioni di inclusione tra i seguenti sottocampi di $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{Q}(i), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{3}), \quad \mathbb{Q}(i\sqrt{3}), \quad \mathbb{Q}(i+\sqrt{3}), \quad \mathbb{Q}(i,\sqrt{3})$$

14. Dimostrare che c'è un isomorfismo di anelli

$$\mathbb{Q}[x]/(x^n-1) \cong \bigoplus_{d|n} \mathbb{Q}(\zeta_d)$$

dove $\bigoplus$ indica la somma diretta di anelli e ζ_d indica una radice primitiva d-esima dell'unità.