Esercizi della dodicesima settimana

(la seguente serie di esercizi introduce subliminalmente alcune delle idee di base della teoria di Galois e mostra come questa possa poi essere utilizzata per risolvere problemi “partici” come quello di determinare il polinomio minimo di un dato elemento algebrico)

1. Dimostrare che il polinomio $x^2 - 5$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$. Dedurne che $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ è un campo di grado 2 su $\mathbb{Q}$.

2. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Dimostrare che ogni automorfismo di $\mathbb{K}$ (come campo) fissa $\mathbb{Q}$ elemento per elemento (ovvero, se $\varphi\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ è un automorfismo, allora $\varphi\big|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$).

3. Sia φ un automorfismo di $\mathbb{K}$. Dimostrare che $\varphi(\sqrt{5}) \in \{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$.

4. Dimostrare che se un automorfismo φ di $\mathbb{K}$ soddisfa $\varphi(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$ allora φ è l'identità. Dedurne che il gruppo $\mathrm{Aut}(\mathbb{K})$ ha cardinalità al più 2.

5. Dimostrare che esiste un automorfismo φ di $\mathbb{K}$ tale che $\varphi(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$. Dedurne che il gruppo $\mathrm{Aut}(\mathbb{K})$ è il gruppo ciclico di ordine 2, ed è generato da questo automorfismo φ.

6. Dimostrare che un elemento α di $\mathbb{K}$ viene fissato da tutti gli elementi di $\mathrm{Aut}(\mathbb{K})$ se e solo se $\alpha \in \mathbb{Q}$.

7. Sia α un elemento di $\mathbb{K}$. Dimostrare che il polinomio $(x - \alpha)(x - \varphi(\alpha))$ è in $\mathbb{Q}[x]$ (dove φ è l'automorfismo del punto precedente).

8. Sia α un elemento di $\mathbb{K}$ e sia $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tale che $p(\alpha) = 0$. Dimostrare che anche $\varphi(\alpha)$ è una radice di $p(x)$. Dedurne che se $\alpha \notin \mathbb{Q}$, allora il polinomio $(x - \alpha)(x - \varphi(\alpha))$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ e dunque è il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.

9. Determinare il polinomio minimo di $2 + 3\sqrt{5}$ su $\mathbb{Q}$.

10. Dimostrare che il polinomio $x^2 - 7$ è irriducibile in $\mathbb{K}[x]$. Dedurne che $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7})$ è un campo di grado 4 su $\mathbb{Q}$.

11. Sia $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7})$. Dimostrare che ogni automorfismo di $\mathbb{L}$ (come campo) fissa $\mathbb{Q}$ elemento per elemento.

12. Sia φ un automorfismo di $\mathbb{L}$. Dimosrare che $\varphi(\sqrt{5}) \in \{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$ e $\varphi(\sqrt{7}) \in \{\sqrt{7}, -\sqrt{7}\}$.

13. Dimostrare che se un automorfismo φ di $\mathbb{L}$ soddisfa $\varphi(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$ e $\varphi(\sqrt{7}) = \sqrt{7}$ allora φ è l'identità. Dedurne che il gruppo $\mathrm{Aut}(\mathbb{L})$ ha cardinalità al più 4.

14. Dimostrare che esiste un automorfismo φ di $\mathbb{L}$ tale che $\varphi(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$.

15. Dimostrare che esiste un automorfismo φ_1 di $\mathbb{L}$ tale che $\varphi_1(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$ e $\varphi_1(\sqrt{7}) = -\sqrt{7}$.

16. Dimostrare che esiste un automorfismo φ_2 di $\mathbb{L}$ tale che $\varphi_2(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$ e $\varphi_2(\sqrt{7}) = \sqrt{7}$.

17. Dimostrare che il gruppo $\mathrm{Aut}(\mathbb{L})$ è isomorfo al gruppo di Klein V_4 ed è generato dai due automorfismi φ_1 e φ_2 dei due punti precedenti.

18. Dimostrare che un elemento α di $\mathbb{L}$ viene fissato da tutti gli elementi di $\mathrm{Aut}(\mathbb{L})$ se e solo se $\alpha \in \mathbb{Q}$.

19. Sia α un elemento di $\mathbb{L}$. Dimostrare che il polinomio

$$(x-\alpha)(x-\varphi_1(\alpha))(x-\varphi_2(\alpha))(x-\varphi_1\varphi_2(\alpha))$$

è in $\mathbb{Q}[x]$ (dove φ_1 e φ_2 sono gli automorfismi dei punti precedenti).

20. Sia α un elemento di $\mathbb{L}$ e sia $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tale che $p(\alpha) = 0$. Dimostrare che $\varphi(\alpha)$ è una radice di $p(x)$ per ogni $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{L})$. Dedurne che se α ha 4 immagini distinte sotto l'azione di $\mathrm{Aut}(\mathbb{L})$, allora il polinomio $(x-\alpha)(x-\varphi_1(\alpha))(x-\varphi_2(\alpha))(x-\varphi_1\varphi_2(\alpha))$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ e dunque è il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.

21. Determinare il polinomio minimo di $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ su $\mathbb{Q}$.