

Esercizi della tredicesima settimana

1. Sia \mathbb{K} un campo e siano $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$ due polinomi con $(p(x), q(x)) = (1)$. Dimostrare che c'è un isomorfismo di anelli

$$\mathbb{K}[x]/(p(x)q(x)) \cong \mathbb{K}[x]/(p(x)) \oplus \mathbb{K}[x]/(q(x)).$$

2. Sia $\alpha \in \mathbb{F}_4$, $\alpha \neq 0, 1$. Trovare il campo di spezzamento \mathbb{E} di

$$f(x) = x^2 + \alpha x + 1$$

su \mathbb{F}_4 . Scrivere inoltre la fattorizzazione in fattori lineari di $f(x)$ in $\mathbb{E}[x]$, una base di \mathbb{E} come spazio vettoriale su \mathbb{K} e una base di \mathbb{E} come spazio vettoriale su \mathbb{F}_2 .

3. Trovare il campo di spezzamento \mathbb{E} di

$$x^3 + x^2 + 2$$

su \mathbb{F}_5 e determinare $[\mathbb{E} : \mathbb{F}_5]$.

4. Trovare il campo di spezzamento \mathbb{E} di

$$(x^3 + x^2 + 2)(x^3 + x + 2)$$

su \mathbb{F}_5 e determinare $[\mathbb{E} : \mathbb{F}_5]$.

5. Sia α una radice di $x^2 - x + 1 \in \mathbb{F}_5[x]$, β una radice di $x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_5[x]$ e γ una radice di $x^2 - 3x + 2 \in \mathbb{F}_5[x]$.

Stabilire quali tra i campi $\mathbb{F}_5(\alpha)$, $\mathbb{F}_5(\beta)$, $\mathbb{F}_5(\gamma)$ siano isomorfi tra loro e, in caso di campi isomorfi, costruire esplicitamente un isomorfismo.

6. Riconoscere nella seguente lista gli anelli tra loro isomorfi:

$$\mathbb{Q}(1+i) \quad \mathbb{Q}[x]/(x^2+1) \quad \mathbb{F}_3[x]/(x^2+1) \quad \mathbb{F}_3[x]/(x^2+x+2)$$

$$\mathbb{F}_3 \oplus \mathbb{F}_3 \quad \mathbb{Q}[x]/(x^2+x+2) \quad \mathbb{F}_3[x]/(x^2-1) \quad \mathbb{Q}[x]/(x^2-1)$$

7. È possibile costruire con riga e compasso:

il lato di un cubo di volume triplo rispetto a un cubo dato:

vero falso

il lato di un cubo di volume uguale a otto volte rispetto a un cubo dato:

vero falso

il lato di un quadrato di area sette volte rispetto a un quadrato dato:

vero falso

il lato di un triangolo equilatero di area uguale a nove volte rispetto a un triangolo dato:

vero falso