

ALGEBRA 1

a.a. 2017/18

Foglio di Esercizi n.2

1. Calcolare l'ultima cifra decimale di 123123^{321321} ;
2. Calcolare le ultime tre cifre decimali di 111^{111} ;
3. Calcolare il resto della divisione di $1329878398928783749723984792102387499287^2$ per 4.
4. Calcolare le ultime due cifre decimali di 12345^{9876} .
5. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il numero

$$n^{55} + 2n^{50} + 3n^{45} + 4n^3 + 5n^2 + 6n$$

è divisibile per 7.

6. Risolvere le seguenti congruenze:

- (a) $2x \equiv 5 \pmod{9}$;
- (b) $15x \equiv 3 \pmod{6}$;
- (c) $6x \equiv 14 \pmod{22}$;
- (d) $3x \equiv 17 \pmod{31}$;
- (e) $5x \equiv 21 \pmod{3}$;
- (f) $5x \equiv 22 \pmod{3}$.

7. Determinare, se esistono, le soluzioni del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 3 & \pmod{6} \\ x \equiv 5 & \pmod{7} \\ x \equiv 7 & \pmod{11} \end{cases}$$

8. Determinare, se esistono, le soluzioni del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 1 & \pmod{3} \\ x \equiv 2 & \pmod{5} \\ x \equiv -3 & \pmod{8} \end{cases}$$

9. Determinare, se esistono, le soluzioni del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 8 & \pmod{10} \\ 4x \equiv 6 & \pmod{12} \\ 5x \equiv 4 & \pmod{16} \end{cases}$$

10. Determinare per quali valori del parametro a il seguente sistema ammette soluzioni:

$$\begin{cases} 8x \equiv 11^{16} & \text{mod } 15 \\ x \equiv a & \text{mod } 18 \end{cases}$$

11. Trovare gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}/(12)$. Verificare che formano un gruppo, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/(12))$, rispetto al prodotto e scrivere la sua tabella. Verificare che l'ordine del gruppo è proprio $\varphi(n)$ e verificare che se $g \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/(12))$, allora $g^{\varphi(n)} = 1$.