Esercizi della quarta settimana

1. Utilizzare la fattorizzazione unica in $\mathbb{Z}$ per dimostrare che $\sqrt[3]{2}$ non è un numero razionale. Dedurne che $\sqrt[3]{2}$ non può essere radice di alcuna equazione di primo grado a coefficienti in $\mathbb{Q}$.

2. Utilizzare il fatto che $\sqrt[3]{2}$ è radice del polinomio $x^3 - 2$ e la divisione col resto in $\mathbb{Q}$ per dimostrare che $\sqrt[3]{2}$ non può essere radice di alcuna equazione di secondo grado a coefficienti in $\mathbb{Q}$.

3. Determinare tre numeri razionali a, b e c tali che
$$\frac{1}{3 + 4\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}.$$

4. Dimostrare che il polinomio $p(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ non ha radici in $\mathbb{R}$. È irriducibile come elemento di $\mathbb{R}[x]$?

5. Sia G un gruppo e sia $H \leq G$ (ovvero sia H un sottogruppo di G). Sia inoltre $K \subseteq H$ un sottoinsieme di H. Dimostrare che $K \leq H$ se e solo se $K \leq G$.

6. Sia G un gruppo e siano $H, K \leq G$ (ovvero siano H e K sottogruppi di G). Si dimostri che $(H \cup K) \leq G$ se e solo se $H \leq K$ oppure $K \leq H$.

7. Sia G un gruppo e siano $H, K \leq G$. Indichiamo con $HK \subseteq G$ il sottoinsieme
$$HK = \{hk, \text{ con } h \in H \text{ e } k \in K\}$$
Dimostrare che $HK \leq G$ se e solo se $HK = KH$

8. Sia G un gruppo. Si dimostri che G è abeliano se e solo se $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ per ogni $x, y \in G$.

9. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, sia $T_{ab} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da
$$T_{ab}(x) = ax + b.$$
Dimostrare che la collezione di applicazioni $\{T_{ab}\}$ al variare di a in $\mathbb{R}^*$ e b in $\mathbb{R}$ forma un gruppo rispetto alla composizione. Indichiamo con G tale gruppo. Dimostrare che la collezione di applicazoni $\{T_{1b}\}$ al variare di b in $\mathbb{R}$ forma un sottogruppo di G. Indichiamo con N tale sottogruppo. Dimostrare che $N \trianglelefteq G$ (ovvero che N è un sottogruppo normale di G) e che si ha $G/N \cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$.

10. Dato un gruppo G, indichiamo con $\mathrm{Aut}(G)$ il gruppo dei suoi automorfismi (come gruppo). Consideriamo la rappresentazione aggiunta $\mathrm{Ad} \colon G \to \mathrm{Aut}(G)$, ovvero la rappresentazione definita da
$$\mathrm{Ad}_g \colon x \mapsto gxg^{-1}.$$

Denotiamo con $\mathrm{Inn}(G)$ l'immagine di Ad. In quanto immagine di un omomorfismo, si tratta di un sottogruppo di Ad. esso prende il nome di sottogruppo degli *automorfismi interni* di G. Dimostrare che $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$.

11. Sia G un gruppo. Indichiamo con $Z(G)$ il centro di G. Dimostrare che per ogni automorfismo di G (come gruppo) si ha $f(Z(G)) = Z(G)$.

12. Sia G un gruppo e sia x un elemento di G. Ricordiamo che il *centralizzante* di x in G è il sottogruppo

$$C_G(x) = \{g \in G \text{ tali che } gx = xg\}$$

Dimostrare che per ogni automorfismo f di G vale $f(C_G(x)) = C_G(f(x))$. Dedurne che elementi coniugati hanno centralizzanti isomorfi.

13. Sia $G \times X \to X$ un'azione (a sinistra) di un gruppo G su un insieme X. Dimostrare che se x e y sono due elementi di X nella stessa orbita rispetto all'azione di G, allora $\mathrm{Stab}(x)$ e $\mathrm{Stab}(y)$ sono isomorfi.

14. Sia D_3 il gruppo diedrale con sei elementi. Determinare le classi di coniugio e i centralizzanti degli elementi di D_3. Determinare il centro di D_3 e verificare l'equazione delle classi.

15. Sia $C_n = \langle x \mid x^n = 1 \rangle$ il gruppo ciclico di ordine n. Per ogni $[k]$ classe resto modulo n, definiamo

$$f_{[k]} \colon C_n \to C_n$$

mediante

$$f_{[k]} \colon x \mapsto x^k.$$

Dimostrare che $f_{[k]}$ è ben definita, ovvero non dipende dal rappresentante k scelto per la classe di equivalenza $[k]$, e che per ogni $[k]$ l'applicazione $f_{[k]}$ è un omomorfismo di C_n in sè. Dimostrare che $[k] \mapsto f_{[k]}$ induce un isomorfismo

$$f \colon U(\mathbb{Z}/(n)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(C_n)$$

tra il gruppo degli invertibili dell'anello $\mathbb{Z}/(n)$ e il gruppo degli automorfismi di C_n (come gruppo).