Esercizi della quinta settimana

1. Sia G un gruppo e siano $H, K \leq G$ sottogruppi di G. Assumiamo $H \trianglelefteq G$. Dimostrare che $H \cap K$ è un sottogruppo normale di K, che il sottogruppo di G generato da H e K è $HK = \{hk \,:\, h \in H,\, k \in K\}$ e che c'è un isomorfismo naturale $HK/H \cong K/(H \cap K)$.

2. Sia G un gruppo per il quale esista un intero positivo $n > 1$ tale che $(ab)^n = a^n b^n$ per ogni $a, b \in G$, e sia $G^{(n-1)} \subseteq G$ il sottoinsieme
$$G^{(n-1)} = \{x^{n-1}, \ \ , x \in G\}$$
Dimostrare che $G^{(n-1)}$ è un sottogruppo di G. Il sottogruppo $G^{(n-1)}$ è normale? Dimostrare che per ogni $x, y \in G$ vale $x^{n-1} y^n = y^n x^{n-1}$.

3. Sia G un gruppo finito e sia p un numero primo tale che $p\big||G|$. Sia X l'insieme
$$X = \big\{(x_1, \ldots, x_p) \in G^p \,:\, x_1 x_2 \cdots x_p = 1_G\big\}.$$
Dimostrare che $|X| = |G|^{p-1}$. Consideriamo adesso l'azione del gruppo ciclico $C_p = \langle t \,:\, t^p = 1\rangle$ su G^p data da
$$t \cdot (x_1, \ldots, x_p) = (x_p, x_1, \ldots, x_{p-1}).$$
Dimostrare che quest'azione si restringe a un'azione di C_p su X. Sia $K \subseteq G$ il sottoinsieme
$$K = \{x \in G \,:\, x^p = 1_G\}.$$
Utilizzando la decomposizione in orbite di X sotto l'azione di C_p dimostrare che $|K| \equiv 0 \mod p$. Dedurne che esiste almeno un elemento x in G di ordine esattamente uguale a p.Questo risultato è noto come *teorema di Cauchy*.

4. Sia G un gruppo di ordine 6. Dimostrare che G ha sia sottogruppi di ordine 2 che sottogruppi di ordine 3.

5. Dimostrare che $A_4 \cong \langle x, y \,|\, x^2 = 1,\, y^3 = 1,\, (xy)^3 = 1\rangle$.

6. Dimostrare che A_4 non ha sottogruppi di ordine 6.

7. Determinare tutti gli omomorfismi da A_4 in S_3.

8. Dimostrare che $\mathrm{Aut}(S_3) \cong S_3$.

9. Sia G un gruppo e sia $G' \subseteq G$ il sottogruppo
$$G' = \langle a^{-1} b^{-1} ab \,:\, a, b \in G\rangle,$$
ovvero il sottogruppo di G generato da tutti gli elementi della forma $a^{-1}b^{-1}ab$, al variare di a e b in G. Dimostrare che G' è un sottogruppo normale di G. Dimostrare che il gruppo quoziente G/G' è un gruppo abeliano. Sia $H \trianglelefteq G$; dimostrare che G/H è abeliano se e solo se $G' \leq H$.

10. Nelle notazioni dell'esercizio precedente, sia H un sottogruppo di G con $G' \leq H \leq G$. Dimostrare che $H \trianglelefteq G$.

11. Sia G un gruppo e siano $H, K \leq G$ sottogruppi di G. Sia $f\colon H \times K \to G$ l'applicazione $(h,k) \mapsto hk$. Dimostrare che f è iniettiva se e solo se $H \cap K = \{1_G\}$. Dimostrare che f è un omomorfismo di gruppi se e solo se $hk = kh$ per ogni $h \in H$ e $k \in K$.