Esercizi della quinta settimana

1. Sia G un gruppo finito e siano $H, N \leq G$ sottogruppi di G. Assumiamo che $N \cap H = \{1_G\}$, che $nh = hn$ per ogni $n \in N$ e $h \in H$ e che $|H| \cdot |N| = |G|$. Dimostrare che $G \cong N \times H$.
2. Dimostrare che $V_4 \cong C_2 \times C_2$
3. Dimostrare che gli unici gruppi di ordine 4 sono (a meno di isomorfismo) C_4 e V_4.
4. Sia $\rho \colon C_2 \to \mathrm{Aut}(C_3)$ l'unico isomorfismo tra C_2 e $\mathrm{Aut}(C_3)$. Dimostrare che $C_3 \ltimes_\rho C_2 \cong S_3$.
5. Dimostrare che gli unici gruppi di ordine 6 sono (a meno di isomorfismo) C_6 e S_3.
6. Sia p un primo dispari con $p \equiv 1 \mod 4$. Dimostrare che esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $x^2 \equiv -1 \mod p$ (*Suggerimento: riguardare la dimostrazione del teorema di Wilson*).
7. Sia p un primo dispari, e supponiamo esista $x \in \mathbb{Z}$ tale che $x^2 \equiv -1 \mod p$. Dimostrare che $p \equiv 1 \mod 4$. (*Suggerimento: se* $x^2 \equiv -1 \mod p$*, allora* $x^4 \ldots$*; quanti sono gli invertibili di* $\mathbb{Z}/(p)$*?*).