Esercizi della settima settimana

1. Sia G un gruppo finito di cardinalità mn con $(m, n) = 1$. Siano $U = \{x \in G \mid x^m = 1\}$ e $V = \{x \in G \mid x^n = 1\}$. Supponiamo che $G \cong U \times V$. Dimostrare che $|U| = m$ e $|V| = n$.

2. Determinare tutti i gruppi abeliani di ordine 60.

3. Determinare tutti i gruppi di ordine 10.

4. Dimostrare che un gruppo abeliano finito è ciclico se e solo se è dalla forma $G = C_{p_1^{k_1}} \times C_{p_2^{k_2}} \times \cdots C_{p_l^{k_l}}$ con $p_1, p_2, \ldots, p_l$ primi distinti.

5. Sia G un gruppo abeliano finito. Dimostrare che se G non è ciclico esiste un numero primo p tale che $C_p \times C_p$ sia un sottogruppo di G.

6. Sia $\mathbb{F}$ un campo finito. Dimostrare che $\mathbb{F}^*$ è ciclico. (*Suggerimento: quante sono al massimo le radici distinte dell'equazione $x^p = 1$?*)