Esercizi della nona settimana

1. Si considerino i seguenti polinomi a coefficienti in $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/(5)$
$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 2 \quad \text{e} \quad g(x) = 4x^3 + 2x^2 - 1.$$
Trovare il MCD e scrivere l'identità di Bézout.

2. Considerati i seguenti polinomi:
$$f(x) = x^5 - x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x - 2,$$
$$g(x) = x^6 - x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 2,$$
se ne calcoli il massimo comun divisore e la fattorizzazione in fattori irriducibili su $\mathbb{Q}$.

3. Siano d_1, d_2 e d_3 tre interi dispari, e siano p_1, p_2 e p_3 tre interi pari. Mostrare che il polinomio
$$d_1x^5 + p_1x^4 + p_2x^3 + d_2x^2 + p_3x + d_3$$
è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

4. Si stabilisca se il polinomio
$$x^5 + 7x^4 + 2x^3 + 6x^2 - x + 8.$$
sia irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$:

5. Fattorizzare in irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$ il polinomio
$$x^5 + x^4 - 3x + 3.$$

6. Determinare la fattorizzazione in irriducibili di
$$p(x) = 5x^5 - 5x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 5x - 10$$
come polinomio a coefficienti in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ rispettivamente.

7. Siano I e J due ideali (bilateri) di un anello A. Il sottoinsieme $I \cup J$ è un ideale di A? (dimostrarlo o fornire un controesempio)

8. Siano I e J due ideali (bilateri) di un anello A. Il sottoinsieme $I \cap J$ è un ideale di A? (dimostrarlo o fornire un controesempio)

9. Sia X un insieme e A un anello. Indichiamo con $\mathcal{F}(X, A)$ l'insieme di tutte funzioni definite su X a valori in A. Dimostrare che $\mathcal{F}(X, A)$ è un anello rispetto alle operazioni di somma e prodotto definite puntualmente, ovvero definite da
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (fg)(x) = f(x)g(x)$$
dove $f, g \in \mathcal{F}(X, A)$ e $x \in X$.

10. Dimostrare che i seguenti due sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ sono sottoanelli:
$$A = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; n \text{ è primo con } 3 \right\};\ B = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; n \text{ è una potenza di } 3 \right\}$$
Determinare inoltre l'intersezione $A \cap B$.

11. a) Dimostrare che $\mathbb{Z}[x]/(x) \cong \mathbb{Z}$.

    b) Descrivere gli ideali di $\mathbb{Z}[x]$ contenenti (x) e stabilire quali di essi siano massimali.

12. Determinare tutti gli ideali dell'anello quoziente $\mathbb{Z}/(12)$.

13. Sia $f(x) = x^2 + 4 \in \mathbb{F}_{13}[x]$, dove al solito $\mathbb{F}_{13} = \mathbb{Z}/(13)$. Determinare i divisori dello zero in $\mathbb{F}_{13}[x]/(f(x))$ e trovare (se esiste) l'inverso di $[x]$ in tale anello.

14. Mostrare che $\mathbb{R}[x]/(x^4+1)$ non è un campo. Mostrare invece che $\mathbb{Q}[x]/(x^4+1)$ è un campo, ed esibire un isomorfismo fra tale campo ed un opportuno sottocampo di $\mathbb{C}$.

15. Sia $\mathbb{A}$ un anello commutativo e sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{A}$. Per ogni polinomio $p(x) \in A[x]$,
$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_k x^k,$$
poniamo
$$p(A) = a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots a_k A^k.$$
Dimostrare che $\phi_A \colon p(x) \mapsto p(A)$ definisce un omomorfismo di anelli $\phi_A \colon \mathbb{A}[x] \to M_{n\times n}(\mathbb{A})$.

16. Consideriamo l'omomorfismo di anelli
$$\phi_A : \mathbb{Q}[x] \to M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$$
definito dalla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
(si veda l'esercizo precedente). Determinare il nucleo di ϕ_A. Dimostrare che $\mathrm{Im}(\phi)$ è un campo.

17. Siano A e B due anelli, sia I un ideale di A e sia J un ideale di B. Dimostrare che:

    a) $I \oplus J$ è un ideale di $A \oplus B$.

    b) $(A \oplus B)/(I \oplus J) \cong (A/I) \oplus (B/J)$.

18. Sia
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
Mostrare che

    a) A è un sottoanello di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

    b) $I = \{M \in A \mid M^2 = 0\}$ è un ideale bilatero di A.

    c) $A/I \cong \mathbb{R}$

Curiosità

$$\begin{aligned}\Phi_{105}(x) = x^{48} &+ x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2\,x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{36} + x^{35}\\ &+ x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20}\\ &+ x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^{9} - x^{8} - 2\,x^{7}\\ &- x^{6} - x^{5} + x^{2} + x + 1\end{aligned}$$